App. mil.
103m

Poncelet

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Ueber

die Stabilität der Eisenbahnwagen

[illegible]

deren Fundamente

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Aus dem [illegible]

und mit

einem Anhange [illegible]

[illegible]

J. W. [illegible]

[illegible]

[illegible]

Braunschweig.

Verlag von G. C. E. Meyer sen.

[illegible]

Ueber
die Stabilität der Erdbekleidungen
und
deren Fundamente

von

Poncelet,
Ingenieur-Bataillons-Chef.

Aus dem Französischen übersetzt
und mit
einem Anhange
vermehrt
von

J. W. Lahmeyer,
Königlich Hannöverschem Hydrotekten.

Mit 6 Figurentafeln.

Braunschweig,
Verlag von G. C. E. Meyer sen.
1844.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS
234. D.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede des Verfaßers.

Die in diesem Werke enthaltenen Untersuchungen, die ich schon im Jahre 1835 begann, sollten ursprünglich zu einem Berichte an die Befestigungskomité dienen. Bis auf einen Theil des dritten Abschnittes und bis auf die Figurentafeln lagen sie schon im Jahre 1837 zum Drucke bereit. Einige Auszüge daraus erschienen zu dieser Zeit im Aide Mémoire von Laisné und im Jahre 1838 in dem von Morin.

Vorrede des Uebersetzers.

Die Ponceletsche Abhandlung über den Druck der Erde gegen eine Stützwand, nach der diese Uebersetzung veranstaltet ist, befindet sich in einem Werke (Mémorial de l'officier du génie Nro. 19. 1838) das im Buchhandel nicht zu haben ist. Es existiert daher auch in Deutschland nur wenige Male.

Dies bestimmte mich um so mehr zu einer Uebersetzung der vorliegenden Abhandlung, in der durch Poncelet die Theorie des Erddruckes zu einem bedeutenden Grade der Vollkommenheit gebracht ist; zumal da die Vervollkommnungen dieser Theorie durch die Franzosen seit Français, in Deutschland gleichfalls unbekannt geblieben sind, und auch der kleine Auszug aus Poncelets Abhandlung, der in der zweiten Ausgabe des Aide Mémoire von Morin sich befindet, durch die deutsche Uebersetzung der ersten Ausgabe des letztgenannten Werkes manchen unzugänglich wird.

Da der Herr Geheime Oberbaurath Hagen eine andere Zerlegung der Kräfte angenommen hat, wie die von den Franzosen seither benutzte, so schien es mir nöthig, aus den vorhandenen Versuchen die Richtigkeit der einen oder der andern Zerlegung darzuthun.

Dies ist in dem letztern Theile des Anhanges geschehen.

Was den erstern Theil desselben betrifft, so hoffe ich durch die Mittheilung desselben den Freunden der Theorie einen willkommenen Dienst geleistet zu haben.

Wegen der oftmaligen Ungleichheit in der Ortographie, namentlich im Anfange hoffe ich Nachsicht zu erhalten, da ich mich des neuern Schreibgebrauches noch zu kurze Zeit bedient und deshalb oftmals einen Fehler dagegen übersehen habe, wenn das Worte nach dem alten Schreibgebrauche gedruckt war.

Schließlich bemer e ich noch, daß die Petitsche Abhandlung über Kreisgewölbe, auf die Poncelet in diesem Werke verweis't, von mir für das Crellesche Journal der Baukunst bearbeitet und bei Reimer in Berlin erschienen ist. Auf dem Titel ist irrthümlicher Weise mein Name in dem zweiten Buchstaben verdruckt.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	1

Erster Abschnitt.

Berechnung der Stärke der Erdbekleidungen und Halbbekleidungen für den gewöhnlichen Fall.

Bezeichnung und Grundformeln	7
Kapitel I. Von den vertikalen Erdbekleidungen für den Fall des Umsturzes	14
Tabellen über die Mauerstärken	21
Praktische Formeln	30
Kapitel II. Von den vertikalen Erdbekleidungen für den Fall des Gleitens	34
Vergleichende Uebersicht der Mauerstärken	41
Erfahrungen über die Reibung und Kohäsion des Mauerwerkes	45
Stabilitätskoeffizienten	48
Kapitel III. Transformation der Profile	52
Einfluß der Strebepfeiler	59
Entstehung der praktischen Regeln	64
Allgemeines Profil, und Prinzipe von Vauban	68

Zweiter Abschnitt.

Geometrische Untersuchungen über den Druck und die Hebkraft der Erde.

Kapitel I. Graphische Auflösung für die Hauptaufgaben in Bezug auf die Stabilität der Halbbekleidungen	77
Gewöhnlicher Fall	78
Erdbekleidungen und Aufwürfe von beliebiger Böschung	89
Kapitel II. Geometrische Theorie des Druckes und der Hebkraft der Erde	103
Moment und Hebelarm	115
Kapitel III. Anwendung auf verschiedene Beispiele	120
Terrassen mit sanftem Abhange	121
Gleichförmige Ueberhöhungen	126
Erdbekleidungen mit einem Rundenwege und Kavaliere	130
Mauerprofile für die Enden der Ausfüllung	134

Dritter Abschnitt.

Stabilität der Fundamente.

Kapitel I. Daten und Hauptaufgaben	144
Für den Fall des Umsturzes	150

Seite
Für den Fall des Gleitens 153
Besondere Anwendung 158
Bruch des Mauerwerkes 161
Zusammendrückbarkeit des Bodens 166

Kapitel II. Vorzüglichste Mittel, das Gleiten der Fundamente zu verhindern 177
Langpfähle und Spundpfähle verbunden 177
Dieselben isoliert 183
Stützpfeiler 185
Risbermen, Grundböden 187

Kapitel III. Allgemeine Befestigungsarten der Fundamente 192
Hebende und zusammendrückende Massen 192
Fundieren auf Sand 195
Fortpflanzung der Pressungen, Bogenstützung 202
Anmerkung über die analytischen Relationen zwischen dem Druck und der Hebkraft 216

Anhang.

Theorie des Erddruckes mit Berücksichtigung der Kohäsion bei veränderlicher Dichtigkeit der Erde 234
Erdausgrabungen 244
Theorie der Futtermauern nach Français 245
Theorie der Strebepfeiler 248
Versuche von Woltmann über den Seitendruck der Erde . . . 250
Versuche von Martony 252
Hagens Theorie über den Seitendruck der Erde 260
Versuche von Hagen 265
Vergleichung der Coulombschen und Hagenschen Theorie . . 266

Einleitung.

Die Vervollkommnungen, die in der letzten Zeit die Coulomb'sche Theorie über den Druck der Erde erhalten hat, bestehen vorzüglich in den Vereinfachungen der direkten Auflösung durch Prony und Français. Ihre Rechnungen wurden von Audoy dann auf andere Annahmen über die Beschaffenheit der Erdfüllung angewandt, und zuletzt von Persy mittelst eines sinnreichen Kunstgriffes, der in der Substitution der Summen der sinus und cosinus statt der Produkte besteht, bedeutend abgekürzt. Alle diese Resultate beruhen aber auf der beschränkten Annahme, daß die obere Fläche der Erdfüllung durch eine horizontale Ebene begrenzt werde, die in der Verlängerung der inneren Mauerwand endigt; sie sind daher auch nicht auf Erdbekleidungen der Festungswerke anwendbar, oder höchstens nur annäherungsweise auf Brustwehren oder Ueberhöhungen, die in Bezug auf die ganze Höhe der zu haltenden Erde eine geringe Höhe besitzen.

Coulomb hatte schon in seinem Memoire vom Jahre 1773 die Veränderungen angezeigt, die man seiner Auflösung geben müße, sobald eine konstante Ueberhöhung von beliebiger, aber von der Größe des Bruchprisma's unabhängiger, Form vorhanden sei. Prony in seinen Recherches sur la poussée des terres 1802 und Navier in seinen Leçons sur l'application de la mécanique aux con-

structions *) haben auch speziell den Fall gleichförmiger Ueberhöhungen betrachtet, die aus getrennten Materien bestehen, und in welchen der Bruch nur nach vertikalen Ebenen geschehen kann; diese Annahme würde aber offenbar nicht für gewöhnliche Festungsbrustwehren, überall nicht für diejenigen passen, die eine beträchtliche Höhe im Vergleich zu der Mauer besitzen, welche letztere dann Halbbekleidung genannt wird. Endlich vernachläßigte man bei der Auflösung der Aufgabe das Gewicht der Erde, die das Mauerwerk bedeckt; der Einfluß derselben wächst aber mit den Dicken der letztern, so daß man in den Rechnungen darauf Rücksicht nehmen muß.

Audoy hat in einer Note der 1sten Nro. des Mémorial de l'officier du génie (pag. 349 ff.) die Auflösung für den besondern Fall der Halbbekleidungen gegeben, und dadurch den Ingenieuren (die schon die Uebertreibung der Dicken bemerkt hatten, die in diesem Falle durch die gebräuchlichen Methoden angegeben wurden), einen wichtigen Dienst geleistet. Leider hören die oben erwähnten analytischen Vereinfachungen für diesen Fall auf, und muß man

*) Pag. 149 Nro. 238 der Ausgabe vom Jahre 1833. Navier hat auch auf die Möglichkeit des Bruches in dem Mauerkörper Rücksicht genommen: die Resultate, auf die er n°s 241, 242 und 248 selbst bei der Annahme einer Kohäsion $=0$, gelangt, zeigen, daß es unnütz wäre, darauf in der Anwendung Rücksicht zu nehmen, wenigstens auf denjenigen, der nach einer durch die vordere Kante der Mauerbasis gehenden geneigten Linie erfolgen könnte. Für die Bedingung, daß dieser vordere Theil nicht zerdrückt werde, mit der er sich besonders §. 219 beschäftigt, führt er nach Français Methode einen Stabilitätskoeffizienten ein, der den Angriffspunkt der Mittelkraft aus dem Drucke und dem Mauergewichte auf ungefähr $^4/_9$ der Entfernung zwischen der vordern Kante der Mauerbasis und der durch ihren Schwerpunkt gehenden Vertikale verlegt, gerade, wie dies mit dem mittlern Vaubanschen Profile von 10^m Höhe der Fall ist. Die Erfahrung lehrt, daß eine solche Stützfläche, die wenigstens $^2/_9$ von der der ganzen Basis beträgt, längst hinreichend ist, um das Zerdrücken der bei militairischen Erdbekleidungen gebräuchlichen Materialien zu verhindern.

daher auf die zuerst von Coulomb gebrauchte direkte Auflösungsmethode zurückgehen; und trotz der glücklichen Form, die Audoy dem Ausdruck für den Druck gegeben hat, führt diese Methode, bei der Aufsuchung der Momente, auf Weitläufigkeiten, die der Natur der Aufgabe anhängen und die sehr die Anwendung der neuen Formeln auf die Praxis zu beschränken scheinen. Dies hat mich zu der Untersuchung bewogen, ob sich nicht für die gewöhnlichen Fälle, mittelst weit genug ausgedehnter numerischer Tafeln, oder mittelst einfacher empirischer Formeln, die Rechnungen für die gewöhnlichsten Fälle abkürzen laßen, ohne der Genauigkeit zu sehr zu schaden.

Hoffentlich werden die langwierigen und beschwerlichen Untersuchungen des ersten Abschnittes über diesen Gegenstand denjenigen Ingenieuren von Nutzem sein, denen die Zeit fehlt, solche Rechnungen auszuführen und die auf zweckmäßige Sparsamkeit sehen. Wenigstens können sie dazu dienen, etwas Licht über die Anwendungen einer Theorie zu verbreiten, die nur dann einen hinlänglichen Grad von Vervollkommnung erlangen wird, wenn man allmählig diese Anwendungen auf die verschiedenen, in der Praxis vorkommenden, Aufgaben gemacht haben wird, von denen mehre eine spezielle Untersuchung über die physische Beschaffenheit der, als Halbflüßigkeiten betrachteten Erden, erfordern *). Bis jetzt ist durch einigermaaßen sichere Prinzipien erst die einzige Aufgabe, über den Druck gegen unbegrenzte Mauern von gleichförmigem Profile, aufgelöst, und es bleiben noch über die Anordnung der Fundamente, der Strebe-

*) Nachdem dies geschrieben war, hat Garibel, dem man schon gelehrte Untersuchungen über die Theorie der Gewölbe und über das Defilement verdankt, über diesen Gegenstand ein Memoire, voll geistreicher Ansichten geschrieben: Essai sur l'équilibre des demi-fluides à frottement, et application à la stabilité des revêtements militaires. Paris, 1839, chez Bachelier et Carilian-Goeury, libraires, dessen Resultate aber schwerlich von den Ingenieuren angenommen werden dürften.

pfeiler u. s. w. viele interessante und schwierige Untersuchungen übrig, die wegen der Weitläufigkeit der Formeln und der Willkühr der Annahmen die jetzigen Kräfte der Analysis zu übersteigen scheinen.

Dennoch glaubte ich die Frage über Stabilität der Strebepfeiler und die über die Transformation der Profile nicht ganz mit Stillschweigen in dem ersten Abschnitte dieses Buches übergehen zu dürfen, da man häufig Anwendung davon zu machen hat; ich habe dieserhalb versucht, hierüber einige Regeln und Vorschriften zu geben, die die Unbestimmtheit und das vage Herumtappen bei dem Entwerfen derselben verbannen.

Die Vergleichung der, durch die strengen Formeln gegebenen, numerischen Resultate, mit denen, welche aus der Transformation in Bezug auf das allgemeine Vaubansche Profil hervorgehen, hat mich erkennen lassen, daß diese Regel, so wie sie uns von Bélidor überliefert ist, für Bekleidungen und Halbbekleidungen nicht etwa bloß auf lange Erfahrungen gestützt ist, wie man das gewöhnlich glaubt, sondern auf eine genaue geometrische Theorie, deren Prinzip ich glücklicher Weise aufgefunden zu haben glaube, und das uns jetzt gestattet, anstatt eine, durch den Gebrauch und die Zeit sanktionierte, Regel unbedingt anzuwenden, die allgemeine Auflösungsart, von der Vauban uns einen besondern Fall bei der Aufstellung seines Profiles gegeben hat, nach den Umständen und nach ökonomischen Rücksichten zu verändern, wie dies von ihm selbst öfter geschehen ist.

Als ich diese Arbeit im Jahre 1835 unternahm, hatte ich nur die gebräuchlichsten Fälle jeder Aufgabe im Auge, so wie die Umänderung der neuen Audoyschen Formeln für Halbbekleidungen in geometrische Konstruktionen; dieser Versuch gelang mir, da die analytischen Ausdrücke so verwickelt sind, mehr als ich es dachte, und ich würde mich auf diese Auflösungsart, die ich für viel passender für die Ingenieure halte, welche mit dem Entwerfen der Pro-

jekte beauftragt sind, beschränkt haben, wenn ich nicht bemerkt hätte, daß viele von ihnen die numerischen Tafeln und empirischen Formeln vorziehen, selbst wenn diese nicht alle wesentlichen Elemente der Aufgabe berücksichtigen. Wenigstens aber müßen die letzteren auf sicheren Prinzipien beruhen, und die Grenzen ihrer Anwendbarkeit, so wie die Umstände, unter denen man ihnen Vertrauen schenken darf, bekannt sein. Diese Bemerkung wird, wie ich hoffe, den analytischen Theil dieses Buches entschuldigen.

Was die geometrische Auflösung der Aufgabe betrifft, so glückte es mir, auf eine sehr einfache Weise den Fall der Halbbekleidungen mit vertikaler innerer Seitenwand, der vorzüglich von Audoy in der erwähnten Note des Mémorial behandelt ist, aufzulösen, und wurde ich dadurch veranlaßt, diese Art der Auflösung auf die Halbbekleidungen mit geneigter innerer Seitenwand auszudehnen, ohne dabei noch eine Annahme über die Neigung der Flächen zu machen, in denen der Bruch sich ereignen muß; dies umfaßt die Terrassen in Form von Kavalieren, oder die mit einem Rundenwege, die Glaçis mit größerer oder geringerer Abdachung u. s. w., die häufig in der Praxis vorkommen und nur durch sehr complizierte Formeln aufgelös't werden könnten. Da die Reibung der Erde auf der innern Mauerwand unter gewissen Umständen bedeutend werden kann, so habe ich darauf Rücksicht zu nehmen gesucht, ohne die Auflösung dadurch schwieriger zu machen; ich habe ferner noch auf diese nämlichen Prinzipien eine Theorie der Hebkraft (butée) der Erden, oder des Widerstandes zu gründen versucht, welchen sie der Wirkung der Kräfte entgegensetzen, die sie zur Seite zu schieben suchen. Diese ganz neue Theorie hat mir Gelegenheit gegeben, in dem letzten Abschnitte dieses Buches verschiedene wichtige Aufgaben über die Stabilität der Fundamente zu behandeln, die man bis jetzt ganz vernachläßigt hatte, und von denen einige schon von Vauban berührt sind.

Man sieht daher, daß ich mich in diesem Buche nicht nur mit der Vereinfachung der bekannten Formeln beschäftigt, sondern daß ich auch die Theorie auf bisher noch nicht behandelte Aufgaben erweitert habe, was nach den gebräuchlichen Methoden sehr schwer gewesen sein würde. Lies't man die letzten Theile durch, so wird man leicht bemerken, daß man sogleich den allgemeinsten Fall hätte behandeln können, ohne dadurch undeutlich oder weitläufig geworden zu sein; es schien mir aber weniger ermüdend und für den Lehrer angemeßener, den natürlichen und allmähligen Ideengang beizubehalten, und nach und nach die verschiedenen Auflösungsmethoden der am meisten in der Praxis gebräuchlichen Fälle vorzuführen.

Erster Abschnitt.

Berechnung der Stärke der Erdbekleidungen und Halbekleidungen für den gewöhnlichen Fall.

Bezeichnungen und Grundformeln.

1. Sei $ABCD$ Fig. 1 das Profil einer Erdbekleidung, deren innere Seite vertikal ist. Ueber derselben befindet sich ein Erdaufwurf, dessen Abdachung hier nach Audoy durch die mittlere unbegrenzte Horizontale EF — die die Erweiterung der vertikalen Seitenwand BC in G und die der äußeren Böschung des Erdaufwurfs in E trifft — ersetzt gedacht werden soll. Der Durchschnitt H von BC und IE ist hier unter G angenommen um den allgemeinsten Fall der Aufgabe zuerst zu betrachten.

Im folgenden werden folgende Bezeichnungen beibehalten werden:

H und e die Höhe BC und die Stärke AB an der Basis, der Mauer.

h und h_1 die Höhen CG und HG; es ist also HG die Entfernung zwischen dem Punkte H und der mittlern Höhe der Abdachung über der oberen Mauerkante.

b die Entfernung dI des Fußpunktes der äußeren Böschung des Erdaufwurfs von der Vertikale der vordern Kante A der Mauergrundfläche; diese Entfernung wird gleich DI, d. i. gleich der Berme, wenn die äußere Seitenwand AB vertikal ist.

α und θ die Winkel, welche die natürliche Böschung der Erde und die äußere Böschung EI des Erdaufwurfs mit der Vertikale bilden.

$f = \operatorname{cotg} \alpha$ der Reibungskoeffizient der Erde.

f_1 der des Mauerwerks.

p und p_1 die Gewichte eines Kubikmeters Erde und eines Kubikmeters Mauerwerk.

P und M die Intensität und das, auf den Punkt A bezogene, Moment des durch die Erde rechtwinklig auf die ganze Höhe $BH = H + h - h_1$ ausgeübten Druckes.

δ und δ_1 Stabilitätskoeffizienten in Bezug auf das Gleichgewicht des Umsturzes der Erdbekleidung um die Kante A, oder in Bezug auf das des Gleitens nach der Länge AB der Basis; oder mit andern Worten: die Faktoren, mit denen die Intensität P des Druckes oder sein Moment M zu multiplizieren sind, damit sie im Gleichgewichte stehen.

Endlich sei zur Abkürzung

$$u = \frac{h_1}{H + h} = \frac{GH}{GB}$$

wo

$$h_1 = CG - CH = h - CI \operatorname{cotg} \theta = h - (e - b) \operatorname{cotg} \theta$$

$$a = \frac{h}{H} = \frac{CG}{BC}$$

$$x = \frac{e}{H} = \frac{AB}{BC}$$

$$m = \frac{b}{H} = \frac{Id}{BC}$$

$n = \frac{Dd}{Ad}$ = der Tangente des Neigungswinkels der äußern Böschung der Mauer gegen die Vertikale.

2. Um P und M zu bestimmen, vernachläßigt man gewöhnlich die Kohäsion der Erdausfüllung und ihre Reibung gegen BH, wodurch man größere Mauerdicken erhält, als sie in der Wirklichkeit sind. Betrachtet man nun ein beliebiges Erdprisma $bHEX$, welches von der unbegrenzten Horizontale EF begrenzt wird, und dessen Gewicht $= Q$, dessen ganze Höhe $bG = z$ und dessen Winkel bei $b = v$ sei, so findet man den Werth F des horizontalen Drucks, welchen dasselbe auf die Höhe $Hb = z - h_1$ ausübt, indem man bemerkt, daß diese Kraft in entgegengesetzter Richtung angebracht, das Herabsinken des Gewichtes Q auf der Böschung bX verhindern muß. Dies Verhindern geschieht aber durch die Reibung, welche Q hervorbringt, und deren Werth offenbar $f(F . \cos v + Q . \sin v)$ ist, da $F . \cos v$ und $Q . \sin v$ die Komponenten recht-

winklig auf die Böschung bX der beiden Kräften F und Q sind. Die parallelen Komponenten sind $F \sin v$ und $Q \cos v$. Hieraus ergiebt sich unmittelbar die Gleichung für das Gleichgewicht.

$$Q \,.\, \cos v = F \sin v + f(F \cos v + Q \sin v)$$

woraus

$$F = Q \frac{(1 - f\, tg\, v)}{f + tg\, v} = \tfrac{1}{2} p (z^2\, tg\, v - h_1{}^2\, tg\, \theta) \frac{1 - f\, tg\, v}{f + tg\, v}$$

da $Q = p \times$ Oberfläche $bHEXb = p\,(bGX - HGE)$ ist.

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{h_1{}^2\, tg\, \theta}{z^2} = q\,,\, tg\, v = \omega,$$

so wird

$$F = \tfrac{1}{2} p z^2 \frac{(\omega - q)(1 - f\omega)}{f + \omega}$$

Betrachtet man ω oder den Winkel $GbX = v$ als allein veränderlich, so muß nach Coulomb's Prinzipe das Maximum von F den Druck auf bH geben. Demnach muß

$$\frac{dF}{d\omega} = \tfrac{1}{2} p z^2 \left[\frac{(f+q)(1+f^2)}{(f+\omega)^2} - f \right] = 0$$

$$\frac{d^2 F}{d\omega^2} = -\tfrac{1}{2} p z^2 \frac{2(f+q)(1+f^2)}{(f+\omega)^3} < 0,$$

woraus

$$f + \omega = + \sqrt{\frac{(f+q)(1+f^2)}{f}} \text{ oder } \omega = \sqrt{\frac{(f+q)(1+f^2)}{f}} - f$$

und durch Substitution

$$F = \tfrac{1}{2} p z^2 \frac{[\sqrt{(f+q)(1+f^2)} - (f+q)\sqrt{f}]}{\sqrt{f+q}} \times$$

$$\frac{[1 + f^2 - \sqrt{f}\sqrt{(f+q)(1+f^2)}]}{\sqrt{1+f^2}}$$

$$= \tfrac{1}{2} p z^2 (\sqrt{1+f^2} - \sqrt{f^2 + fq})^2.$$

Substituirt man für q und ω ihre obigen Werthe, so erhält man endlich

$$F = \tfrac{1}{2} p \left(z\sqrt{1+f^2} - \sqrt{f^2 z^2 + f\,tg\,\theta\,h_1^2}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{2} p f^2 \left(z\sqrt{\frac{1+f^2}{f^2}} - \sqrt{z^2 + \frac{tg\theta\,h_1^2}{f}}\right)^2$$

als Ausdruck für den Druck auf bH, und

$$tg\,v = \sqrt{\frac{1+f^2}{f^2}}\sqrt{f^2 + f\,tg\,\theta\,.\frac{h_1^2}{z^2}} - f$$

für die Tangente des Winkels GbX des entsprechenden Prismas. Dieser Winkel ist, wie man sieht, unabhängig von der Höhe der zu haltenden Erde.

3. Der Druck auf das Element von der Höhe dz, das sich in b befindet ist dF; dies giebt für sein Moment in Bezug auf die vordere Kante A der Mauergrundfläche den Differentialausdruck $(H+h-z)$ dF, dessen Integral

$$\int (H+h-z)\,dF = F(H+h-z) + \int F\,dz$$

genommen von der Höhe $z = GH = h_1$ bis zu der $z = GB = H+h$, für die sein erstes Glied verschwindet, den Werth des Momentes M vom Drucke auf die ganze Höhe der durch die Erde gedrückten Fläche BH giebt.

Setzt man zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{1+f^2}{f^2}} = \frac{1}{\cos\alpha} = c,\ \frac{tg\,\theta}{f} = tg\,\theta\,tg\,\alpha = i^2$$

so wird der Ausdruck des Integrals

$$\tfrac{1}{2} p f^2 \left[\left\{(1+c^2)z^2 + i^2 h_1^2 - 2cz(i^2 h_1^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}\right\}(H+h-z)\right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{3}(1+c^2)z^3 + i^2 h_1^2 z - \tfrac{2}{3}c(i^2 h_1^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}\right] + Const.$$

Bringt man alles auf denselben Nenner und setzt $h_1 = u(H+h)$, so wird das Integral für die Grenze $z = BG = H+h$

$$\tfrac{1}{6} p f^2 (H+h)^3 \left[1 + c^2 + 3i^2 u^2 - 2c(1+i^2u^2)^{\frac{3}{2}}\right] + Const.$$

und für die Grenze $z = GH = h_1$

$$\tfrac{1}{6} p f^2 (H+h)^3 \left\{\begin{matrix}[3(1+c^2)u^2 + 3i^2u^2 - 6c(1+i^2)^{\frac{1}{2}}u^2](1-u) \\ + (1+c^2)u^3 + 3i^2u^3 - 2c(1+i^2)^{\frac{3}{2}}u^3\end{matrix}\right\} + Const;$$

durch Subtraktion beider Ausdrücke ergiebt sich

$$M = \tfrac{1}{6} p f^2 (H+h)^3 \left\{ \begin{array}{l} (1+c^2)(1-3u^2+2u^3) - 2c(1+i^2u^2)^{\frac{3}{2}} \\ \quad + 2c(1+i^2)^{\frac{1}{2}}(3-2u+i^2u)u^2 \end{array} \right\}.$$

oder endlich, wenn man für c und i ihre Werthe setzt

$$(a) \quad M = \tfrac{1}{6} p (H+h)^3 \left\{ \begin{array}{l} (1+2f^2)(1-3u^2+2u^3) - \dfrac{2\sqrt{1+f^2}}{f^2}(f^2+f\,tg\theta u^2)^{\frac{3}{2}} \\ + 2\sqrt{1+f^2}\sqrt{f^2+f\,tg\theta}\left(3u^2-2u^3+\dfrac{tg\theta}{f}u^3\right) \end{array} \right\}$$

Ebenso erhält man für den Ausdruck des Druckes auf die ganze Höhe BH:

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \tfrac{1}{2} p \left[\sqrt{1+f^2}(H+h) - \sqrt{f^2(H+h)^2 + f\,tg\theta\,h_1^2}\right]^2 \\ \quad = \tfrac{1}{2} p (H+h)^2 \left(\sqrt{1+f^2} - \sqrt{f^2+f\,tg\theta\,u^2}\right)^2 \end{array} \right.$$

und für den zugehörigen Werth von $tg\,v$

$$(c) \quad tg\,v = \sqrt{\frac{1+f^2}{f^2}}\sqrt{f^2+f\,tg\theta\,u^2} - f.$$

4) Ersetzt man nach §. 1 f durch $\cot g\alpha$ und u durch $\dfrac{h_1}{H+h}$, so erhält man die Formeln, welche Audoy am erwähnten Orte gegeben hat, nur verallgemeinert, wie er es pag. 352 angiebt.

Setzt man die vorigen Werthe in (b) und (c), so wird

$$(d) \quad P = \frac{p}{2\sin^2\alpha}\left\{(H+h - \cos\alpha\sqrt{(H+h)^2 + tg\theta\,tg\alpha\,h_1^2}\right\}^2$$

$$(e) \quad tg\,v = -\frac{1}{tg\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha\,(H+h)}\sqrt{(H+h)^2 + ty\theta\,tg\alpha\,h_1^2}$$

identisch mit den Formeln Audoy's pag. 351, wenn statt α der Winkel φ und statt h_1 der Buchstabe a, so wie auch $h_1 = h$ oder $IC = CH = 0$ gesetzt wird.

5. Die Größe

$$u = \frac{h_1}{H+h} = \frac{h - (e-b)\cot g\theta}{H+h}$$

welche immer zwischen 0 und 1 liegt ist eine verwickelte Funktion der Dicke e der Erdbekleidung, ausgenommen, wenn $b = e$, d. i. wenn der Fußpunkt I der äußern Böschung des Erdaufwurfs zusammenfällt mit der inneren Kante C der oberen Mauerfläche, dann wird einfach

$$u=\frac{h}{H+h}=\frac{a}{1+a}.$$

6. Liegt der Punkt G unter H, so gehört das Dreieck EGH nicht mehr zum Druckprisma GbX und der Ausdruck $\frac{1}{2}tg\theta h_1{}^2$ für die Oberfläche des Dreiecks müßte aus dem für Q wegfallen, d. h. es müßen in den vorigen Rechnungen h_1 und θ Null gesetzt werden, wodurch man erhält

$$tg\,v=\sqrt{1+f^2}-f=tg\tfrac{1}{2}\alpha$$
$$P=\tfrac{1}{2}p(\sqrt{1+f^2}-f)^2(H+h)^2=\tfrac{1}{2}p\,tg^2\tfrac{1}{2}\alpha(H+h)^2$$
$$M=\tfrac{1}{6}p(\sqrt{1+f^2}-f)^2(H+h)^3=\tfrac{1}{2}p\,tg^2\tfrac{1}{2}\alpha(H+h)^2\tfrac{1}{3}(H+h)$$

was mit den Françaischen Formeln übereinstimmt, so bald $h=0$ und $H=h$ gesetzt wird. Français nimmt auch auf die Kohäsion Rücksicht. Setzt man in seinen Formeln aber den Kohäsionskoeffizienten $c=0$ so werden sie mit den vorigen identisch.*)

7. Was die Gleichungen für das Gleichgewicht in der allgemeinen Annahme Fig. 1 betrifft, aus denen man die Dicke der Basis der Erdbekleidung $ABCD$ Fig. 1 erhält (vergl. §. 1), so werden sie

1. für den Fall des Gleitens auf dieser Basis

$$(f)\qquad \tfrac{1}{2}f_1p_1(2e-nH)H+\tfrac{1}{2}f_1p(e-b)^2\cot g\,\theta=\delta_1 P$$

2. für den Fall des Umsturzes um die Kante A

$$(g)\qquad \tfrac{1}{2}p_1(e^2-\tfrac{1}{3}n^2H^2)H+\tfrac{1}{2}p\cot g\,\theta(e-b)^2(2e+b)=\delta M$$

wo das erste Glied dieser Gleichungen die Reibung, oder das Moment giebt, welches dem Gewichte der Mauer zukommt und das zweite die Reibung oder das Moment in Bezug auf das Gewicht des Erdprismas ICH, welches über der obern Fläche der Mauer sich befindet.

8. Da $u=\dfrac{h-\cot g\,\theta(e-b)}{H+h}$ und da Wurzelgrößen in den Werthen von P und M §. 3 vorkommen, so erhält man Gleichungen, welche respektive die 4te und 6te Potenz von e enthalten, ausgenommen für den Fall (§. 5) wo $b=e$ und $u=\dfrac{h}{H+h}$. In diesem Falle wird

*) Vergleiche Anhang §. 3. Gleichung (f_2).

(h) 1. für den Fall des Gleitens $e = \frac{\delta_1 P}{f_1 p_1 H} + \frac{1}{2} n H.$

(i) 2. für den Fall des Umsturzes $e = \sqrt{\frac{2\delta M}{p_1 H} + \frac{1}{3} n^2 H^2}$ wofür dann P und M à priori entwickelt werden können.

9. Die Gleichungen (f) und (g) werden gleichfalls nur vom 2ten Grade für den Fall der Fig. 2, wofür (§. 6) $h_1 = u = o$ war; dann aber muß man statt des Dreiecks ICH das Trapez $ICGE$ einführen, wodurch sie die folgenden werden

1. im Fall des Gleitens auf AB,

$$f_1 p_1 (2e - nH) H + f_1 p h (2e - 2b - h\,tg\,\theta) = \delta_1 p\,tg^2 \tfrac{1}{2}\alpha (H + h)^2$$

woraus unmittelbar folgt:

$$(j) \quad e = \frac{\delta_1 p\,tg^2 \frac{1}{2}\alpha (H + h)^2 + f_1 p_1 n H^2 + f_1 p h (2b + tg\,\theta\, h)}{2 f_1 (p_1 H + p h)}$$

2. im Fall des Umsturzes

$$\tfrac{1}{2} p_1 H e^2 - \tfrac{1}{6} p_1 n^2 H^3 + \tfrac{1}{2} p (e^2 - b^2) h - \tfrac{1}{2} p h^2\,tg\,\theta \,(b + \tfrac{1}{3} h\,tg\,\theta)$$
$$= \tfrac{1}{6} \delta p\,tg^2 \tfrac{1}{2}\alpha (\;\; + h)^3$$

woraus folgt

$$(k\; e = \sqrt{\left\{ \frac{\delta p\,tg^2 \frac{1}{2}\alpha (H + h)^3 + p\,\mathrm{cotg}\,\theta (b + h\,tg\,\theta)^3 - p\,\mathrm{cogt}\,\theta\, b^3 + p_1 n^2 H^3}{3(p_1 H + p h)} \right\}}$$

10. Man kann also die Dicken der Erdbekleidungen durch diese letztern Formeln berechnen, sobald CG oder $h < CH = (e - b)\,\mathrm{cotg}\,\theta$. Im entgegengesetzten Falle muß man auf die allgemeinen Gleichungen §. 7 zurückgehen, und diese durch Näherung auflösen, was recht gut angeht, da eine strenge Genauigkeit nicht in der Natur der Aufgabe liegt, und man ohne dies im Voraus einen genäherten Werth kennt, oder was dasselbe ist, mehr oder weniger enge Grenzen.

11. Hierfür bemerke man, daß die Kenntnis dieser Grenzen nahe die Lage des Fußpunktes I der äußern Böschung des Erdaufwurfs in Bezug auf die innere Mauerwand bestimmt. Man kann ferner noch die Aufgabe auf die Auflösung einer Gleichung vom 1sten oder 2ten Grade zurückbringen, wenn man IC oder CH als à priori gegeben ansieht und als neue Unbekannte nach Audoy nicht mehr die Dicke an der Basis der Erdbekleidung annimmt, sondern die Entfernung b des Punktes I von der Vertikale des Punktes A.

Setzt man in der That die ganze bekannte Größe

IC oder $e-b=c$

und setzt statt e seinen Werth $b+c$ oder statt b seinen Werth $e-c$ in die Gleichungen (f) und (g), so geben sie unmittelbar, indem man sie in Bezug auf $b+c$ oder e auflös't und bemerkt, daß P und M auch à priori berechnet werden können:

1) für den Fall des Gleitens:

$$b+c=e=\frac{\delta_1 P}{f_1 p_1 H}+\tfrac{1}{2}nH-\tfrac{1}{2}\frac{p}{p_1}\frac{c^2}{H}\operatorname{cotg}\theta$$

2. für den Fall des Umsturzes:

$$b+c=e=-\frac{p\operatorname{cotg}\theta c^2}{p_1 2H}\sqrt{\frac{2\delta M}{Hp_1}+\frac{p^2}{p_1{}^2}\frac{\operatorname{cotg}^2\theta c^4}{4H^2}+\frac{p}{p_1}\frac{\operatorname{cotg}\theta c^3}{3H}+\tfrac{1}{3}n^2H^2}$$

wenn man die nicht zur Aufgabe gehörende Wurzelgröße wegläßt.

Erstes Capitel.

Von den vertikalen Erdbekleidungen für den Fall des Umsturzes.

12. Für die Mauern mit vertikalen Wänden ist allgemein in den vorigen Formeln $n=0$ zu setzen und b als die Breite der Berme ID anzunehmen.

Betrachtet man zuerst nur geringe Erdaufwürfe, so kann man mit Français den Einfluß des Gewichtes vom Erdprisma ICH, das über der Mauer sich befindet, vernachläßigen und das Dreieck GHE als voll annehmen. Wenn man will, kann man den Fehler dieser Annahme mittelst einer passenderen Bestimmung der Horizontale EF verbeßern. Dann erhält man (§§. 6 und 8) die Formel:

$$(l) \qquad e=tg\tfrac{1}{2}\alpha(H+h)\sqrt{\frac{\delta p}{3p_1}\frac{(H+h)}{H}}$$

die Français (Mémorial Nro. IV. pag. 172 und 174) gegeben hat und wobei er $\delta=1{,}8$ nahm, um die Stärke der Vauban-schen Mauern zu erhalten, die bei 10^m Höhe einen 2^m hohen Erdaufwurf tragen können. Dabei nimmt Français ferner noch

mittlere Erde und mittleres Mauerwerk, für welche $\frac{p}{p_1}=\frac{2}{3}, \alpha=45^0$ oder $tg\frac{1}{2}\alpha=0,4142$.

13. Ist der Erdwurf $=0$ oder so klein, daß $\frac{h}{H}$ gegen 1 unter dem Wurzelzeichen wegfallen kann, so wird

$$(m) \qquad e=tg\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{\frac{\delta p}{3p_1}}(H+h)$$

wonach mehre Ingenieure die Mauerstärke für die mittlere Dicke der Erdbekleidungen berechnen und dabei die Stärke proportional der ganzen Höhe nehmen, wenn ein Erdaufwurf stattfindet.

14. Es leuchtet aus den Annahmen zur Ableitung der Französischen Formel (l) ein, daß der Druck zugleich mit der Abnahme des Widerstandes der Erdbekleidung zugenommen hat, wodurch man zu Resultaten gelangt, deren Unrichtigkeit man zwar nur für geringe Eskarphöhen oder für große Erdaufwurfshöhen deutlich sieht; denn ist $H=0$ oder sehr klein gegen $H+h$, so leuchtet ein, daß die Dicke einen unendlichen Werth erhält, während sie endlich und ziemlich klein nach den strengern Audoyschen Formeln sein sollte. Dagegen hat die Regel, wonach die Dicke e einfach dem $(H+h)$ proportional gesetzt wird, diese Unrichtigkeit nicht, obgleich sie diese Dicke für sehr kleine Erderhöhungen auch sehr vergrößert. Dies rührt daher, daß bei der Vernachläßigung von h unter dem Wurzelzeichen eine Kompensation der Fehler stattfindet, die für große Werthe von $\frac{h}{H}$ von Einfluß ist. Doch hiervon wird im Folgenden ausführlicher die Rede sein.

Formeln und Tafeln für mittlere Erden und mittleres Mauerwerk.

15. Die vorigen Betrachtungen leiten uns natürlich dahin, zu versuchen, ob es für die Praxis nicht hinlänglich genau sei, anstatt der Berechnung der Dicke für vertikale Erdbekleidungen durch die genaue Gleichung (g) §. 7, die auf eine Gleichung des 6ten Grades führt, wenn man darin für M und u ihre Werthe in e setzt, die Formel (m) zu substituieren und dem Faktor δ einen passenden Werth für jeden besondern Fall zu geben. Um aber bei der Vergleichung

der Resultate beider Methoden die nöthigen Rechnungen zu vereinfachen, wollen wir $\theta = \alpha$ setzen, oder die äußere Böschung des Erdaufwurfs parallel zur natürlichen Böschung der Erde annehmen, was im gewöhnlichen Falle stattfindet.

Aus demselben Grunde sollen auch die gewöhnliche mittlere Erde und mittleres Mauerwerk genommen werden, für die

$$\alpha = 45^0, tg\,\alpha = 1, p = \tfrac{2}{3} p_1.$$

Ferner war nach §. 1

$$a = \frac{h}{H}, x = \frac{e}{H}, m = \frac{b}{H}, u = \frac{h_1}{H+h} = \frac{h+b-e}{H+h} = \frac{a+m-x}{a+1}$$

und durch Substitution dieser Werthe in (a) und (b) §. 3 erhält man die folgenden

$$M = \tfrac{1}{6}\{3 + 3u^2 + 2u^3 - 2\sqrt{2}(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\}(H+h)^3$$

$$P = \tfrac{1}{2}p(\sqrt{2} - \sqrt{1+u})^2 (H+h)^2$$

wodurch man für den mittlern Hebelarm des Druckes den Ausdruck erhält

$$\frac{M}{P} = \tfrac{1}{3}(H+h)\frac{3 + 3u^2 + 2u^3 - 2\sqrt{2}(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}{3 + u^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{1+u^2}}$$

$$= \tfrac{1}{3}(H+h)(1-u) + \tfrac{1}{3}(H+h)\frac{u + 3u^3 - 2\sqrt{2u^2}\sqrt{1+u^2}}{(1+u)^2}$$

wenn man oben und unten mit $3 + u^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{1+u^2}$ multiplizirt. Hierin ist das zweite Glied ein kleiner Bruch des erstern, das nach den vorigen Voraussetzungen (Fig. 1) den dritten Theil der Höhe BH oder $H+e-b$ darstellt, auf die der Druck P wirksam ist.

16. Giebt man dem u die verschiedenen Werthe, die es zwischen $u=0$ und $u=1$ d. i. von $h_1 = GH = 0$ bis $h_1 = H+h$ oder $GH = GB$ annehmen kann, wodurch BH als Null gegen BG, oder CG als unendlich vorausgesetzt wird: so erhält man die folgende Tafel, worin die Werthe des Verhältnißes $u + 3u^3 - 2u^2\sqrt{2}\sqrt{1+u^2}$: $(1-u)(1+u)^2$ d. i. des zweiten Gliedes zum ersten in dem Ausdrucke für den Hebelarm des Druckes, durch U bezeichnet sind.

Werthe	von u	0,000	0,033	0,05	0,10	0,20	0,25	0,26	0,30
Werthe	von U	0,0000	0,0029	0,0420	0,0685	0,0943	0,0978	0,0980	0,0966
Werthe	von u	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	1,0
Werthe	von U	0,0889	0,0751	0,0591	0,0430	0,0273	0,0146	0,0046	0,0000

17. Aus dieser Tafel sieht man, daß der größte Werth von U kleiner ist als **0,1** und nahe dem $u=0,26$ entspricht, so daß man im Mittel den Hebelarm des Druckes auf **0,05** genau

$$1,05 \,.\, \tfrac{1}{3}(H+h)(1-u)=0,35\,(H+e-b)$$

d. i. $=0,35$ der Höhe BH, auf die der Druck ausgeübt wird, annehmen kann. Der dabei mögliche Fehler in der Bestimmung der Dicke der Erdbekleidung steigt höchstens auf $\frac{1}{40}$, wie es aus der Gleichung (g) §. 7 folgt. Denn für den ungünstigsten Fall, wo h_1 und u Null sind, wird

$$e=(\sqrt{2}-1)(H+h)\sqrt{\frac{\delta p}{3p_1}(1+U)(1+\frac{h}{H})}.$$

Wollte man größere Resultate haben, als es die wirklichen sind, ohne die Dicken zu übertreiben, so könnte man

$$M=P\,.\,\tfrac{1}{3}\,1,098\,BH=0,366\,P$$

für alle Werthe von H und h nehmen. Allein es ist klar, daß der für den Faktor δ anzunehmende Werth in der Gleichung (g) §. 7 sich mit der hier angenommenen Voraussetzung, wenn auch nur um eine sehr geringe Größe, ändern muß.

18. Nimmt man mit Français zur Vergleichung die Vaubansche Erdbekleidung von 10^m mit einer mittlern Erdüberhöhung von 2^m an, so wie, daß sich der Fußpunkt der äußern Erdböschung bis zu den Anfang der äußern Mauerböschung erstrecke, so hat man (§. 7) zur Bestimmung von δ die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}p_1\,H\,(e^2-\tfrac{1}{3}n^2H^2)+\tfrac{1}{3}p\,(e-b)^2\,(e+\tfrac{1}{2}b)=\tfrac{1}{3}\delta P(1+U)\,BH$$

wo

$$n=0,2,\ H=10^m,\ e=3^m,6,\ p=\tfrac{2}{3}p_1,\ b=\tfrac{1}{5}H=2^m$$

und

$$u=\frac{h_1}{H+h}=\frac{0,4}{12}=\tfrac{1}{30},\ BH=11^m,6,$$

also

$$\delta(1+U)=1{,}9173\,,\;\delta=\frac{1{,}9173}{1{,}0029}=1{,}912$$

wenn U aus der vorigen Tabelle genommen wird. Nähme man à priori wie oben den mittlern Hebelarm des Druckes $=0{,}35\,BH$ oder $U=0{,}05$ so würde man $\delta=1{,}826$ erhalten.

19. Hiernach hat man für mittlere Erde und mittleres Mauerwerk und für $\delta=1{,}912$ um die Dicken der vertikalen Mauern proportional dem x (§. 15) zu bestimmen, die Gleichung

$$(n)\quad \begin{cases} x^2+\frac{4}{9}(x-m)^2(x+\frac{1}{2}m) \\ =0{,}425(\sqrt{2}-\sqrt{1+u^2})^2(a+1)^2(x+1-m)(1+U), \end{cases}$$

wo für U die Werthe aus der vorigen Hülfstafel, welche den besondern Werthen von m, a, x und u (§. 15) entsprechen, zu nehmen sind.

20. Auf diese Weise sind durch sukzessive Annäherungen die Werthe der folgenden Tabelle für $m=0$, $m=0{,}2$, $m=x$ berechnet. Für diese Annahme wird die Gleichung (n) respektive

$$x^2+\frac{4}{9}x^3=0{,}425\{\sqrt{2}-\sqrt{1+u^2}\}^2(a+1)^2(1+x)(1+U)$$

$$x^2+\frac{4}{9}(x-0{,}2)^2(x+0{,}1)=0{,}425[\sqrt{2}-\sqrt{1+u^2}]^2(a+1)^2(x+0{,}8)(1+U)$$

$$x=0{,}652(\sqrt{2}-\sqrt{1+u^2})(a+1)\sqrt{1+U}$$

die entsprechenden Werthe von u sind

$$u=\frac{a-x}{a+1}\,,\;u=\frac{a+0{,}2-x}{a+1},\;u=\frac{a}{a+1}$$

In dieser Tafel sind auch noch die Werthe von x aus der Gleichung (l) von Français, die nach den obigen Bezeichnungen und Annahmen folgende wird

$$(o)\qquad x=0{,}262(a+1)\sqrt{1+a};$$

2. die Werthe von x aus der Formel (m) oder

$$(p)\qquad x=0{,}285(a+1)$$

deren Koeffizient 0,285 so berechnet ist, daß für $H=10^m$, $h=2^m$ oder $a=\frac{1}{5}$ die Dicke der vertikalen Erdbekleidung dieselbe Stabilität, wie die von Vauban erhält, nämlich $0{,}342\,.\,H$.

3. endlich diejenigen Werthe, welche die aus der Vauban=schen Regel hergeleitete Formel

$$(q) \qquad e = 0{,}202\,(a + 0{,}89)\,H + 1^m{,}24$$

in Bezug auf Halbbekleidungen nach der Methode der später aufzuführenden Transformation der Profile ergiebt, wobei aber bei der transformirten vertikalen Mauer eine Berme vorausgesetzt wird, die ungefähr $= \frac{1}{5} H$ ist.

Man wird sich aus §. 6 erinnern, daß für den Fall der Figur 2 die obige Gleichung (n) durch die entsprechende ($K.$) aus §. 9 ersetzt werden muß, die hier

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{3}\,\frac{0{,}3281\,(a+1)^3 + (a+m)^3 - m^3}{a + 1{,}5}}$$

giebt. Deren Werthe müßen also an die Stelle der aus der Gleichung (n), oder an die Stelle der aus ihr abgeleiteten Gleichungen ersetzt werden, sobald $h < e - b$ oder $a < x - m$ d. i. wenn $a < 0{,}415$ für $m = 0$ und wenn $a < 0{,}104$ für $m = 0{,}2$ ist.

Man findet diese Grenzen durch einen horizontalen Strich in der 5ten und 6ten Kolumne der folgenden Tafel angezeigt.

Tafel zur Vergleichung der Stärken für vertikale Erdbekleidungen mit Erdaufwürfen nach den Formeln (n), (o), (p) und (q) in Bezug auf mittlere Erde und mittleres Mauerwerk.

Werth von a oder $\frac{h}{H}$	Nach dem transformirten Vaubanschen Profil oder nach der Gleichung (q)	Nach (o)	Nach der praktischen Formel (p)	Nach der genauen Formel (n), wenn die Berme ist		
				Null	$=0{,}2H$	gleich der Dicke
0,0	0,180H + 1m,24	0,262H	0,285H	0,270H	0,270H	0,270H
0,2	0,220H + 1,24	0,345H	0,342H	0,336H	0,342H	0,326H
0,4	0,261H + 1,24	0,434H	0,399H	0,399H	0,405H	0,358H
0,6	0,301H + 1,24	0,530H	0,456H	0,477H	0,457H	0,377H
0,8	0,341H + 1,24	0,633H	0,513H	0,544H	0,504H	0,391H
1,0	0,382H + 1,24	0,751H	0,570H	0,605H	0,540H	0,405H
2,0	0,584H + 1,24	1,361H	0,855H	0,795H	0,655H	0,425H
3,0	0,786H + 1,24	2,096H	1,140H	0,892H	0,717H	0,435H
4,0	0,988H + 1,24	2,929H	1,425H	0,957H	0,755H	0,442H
10,0	2,200H + 1,24	8,568H	3,135H	1,109H	0,839H	0,452H
20,0	4,220H + 1,24	25,213H	5,985H	1,171H	0,872H	0,456H
∞	∞	∞	∞	1,243H	0,927H	0,461H
1	2	3	4	5	6	7

Bemerkungen und Folgerungen.

21. Diese Tabelle führt zu mehren wichtigen Folgerungen. Zuerst sieht man aus den drei letzten Kolumnen, daß die Dicken der Erdbekleidungen proportional mit ihren Höhen wachsen, wenn das umgekehrte Verhältnis *a* dieser Höhen zu denen der Erdaufwürfe sich nicht ändert. Ferner zeigen die unteren Zahlen dieser Kolumnen, daß die Dicken der Erdbekleidungen gegen eine endliche Grenze konvergieren, die noch ziemlich klein ist, wenn die Höhe des Erdaufwurfs im Gegentheil unendlich wird in Vergleich zur Mauerhöhe, analog dem Resultate, welches Petit für die Stärken der Gewölbwiderlagen findet *).

Endlich führt die Zusammenstellung der Zahlen derselben Kolumnen, die zu denselben Werthen von *a* gehören, zu einer andern Bemerkung, die bizarr erscheinen würde, wenn man nicht auf den Einfluß des Gewichtes derjenigen Erde *CIH*, Figur 1, Rücksicht nähme, die über der Mauer liegt und auf den Einfluß, welchen der gegen die Schicht *CH*, die in der Verlängerung der innern Mauerwaud liegt, ausgeübte Druck hat. Das Vorhandensein einer mittelmäßigen Berme nämlich, die für geringe Erdaufwürfe in Vergleich zu den gewöhnlichen Erdbekleidungen, eine merkliche Verstärkung der Mauer verlangt, führt im Gegentheile für sehr bedeutende Erdaufwürfe, die die Höhe der Mauer um 0,4 überschreiten, eine Verminderung der Stärke herbei, die fortwährend zunimmt mit dieser Höhe und mit der Breite der Berme.

22. Die Vergleichung der verschiedenen Werthe in den Horizontalreihen ergiebt die Grenzen für die Anwendbarkeit der verschiedenen Formeln, bei der wir hier jedoch nicht weiter verweilen wollen und bemerken wir nur eins noch.

23. Die Formel

$$x = 0,285\,(H + h)$$

giebt trotz ihrer außerordentlichen Einfachheit weniger unsichere Resultate, als die Françaissche, und kann man sie, ausgenommen ür sehr breite Bremen und für sehr hohe Erdaufwürfe, mit Vertrauen anwenden, sobald die Erde und das Mauerwerk dem mitt-

*) Mémorial de l'officier du génie Nro. 12 pag 94.

lern nahe kommt (§. 15). Es existieren aber unter letztern so große Verschiedenheiten, die relative Dichtigkeit und die Reibung spielen ferner eine so bedeutende Rolle bei der Bestimmung der Dicken von Erdbekleidungen, daß man bei der Annahme der mittlern Erde und des mittlern Mauerwerkes nicht nur sehr bedeutende Irrthümer begehen könnte, sondern daß sogar die allgemeinere Gleichung (m) §. 13 nicht mehr genau genug ohne vorherige Berichtigungen sein möchte. Der in ihr vorkommende Koeffizient δ muß offenbar so genommen werden, daß sie mit der vorigen Formel für $\alpha = 45^0$ und $p = \frac{2}{3} p_1$ zusammenfällt. Dies giebt einfach für den Fall des Umsturzes $\delta = 2{,}13$ uud

$$(r) \quad \begin{cases} e = 0{,}845 \, tg \, \tfrac{1}{2} \alpha \sqrt{\dfrac{p}{p_1}} (H + h) \text{ oder} \\ x = 0{,}845 \, tg \, \tfrac{1}{2} \alpha \sqrt{\dfrac{p}{p_1}} (1 + a). \end{cases}$$

24. Daß die mittlere Erde und das mittlere Mauerwerk nicht immer angenommen werden können, zeigen zwei interessante Artikel von Navier und Gayant in den Annales des Ponts et Chaussées année 1831 pag. 62 und 349.

Formeln und Tafeln für beliebige Erde und beliebiges Mauerwerk.

25. Nach den bisher gemachten Erfahrungen liegt der Werth von $\frac{p}{p_1}$ zwischen 0,6 und 1 und der Winkel α zwischen 35^0 und 70^0, oder es liegt mit andern Worten der Koeffizient $f = \text{cotg}\,\alpha$ zwischen 1,4 und 0,6. Zwischen diesen äußersten Annahmen liegen alle gewöhnlichen Fälle, und für sie sollen die Dicken der Mauern bestimmt werden.

26. Behält man die bisherigen Bezeichnungen (§§. 1, 12, 15 ꝛc.) so wie $\delta = 1{,}912$, $n = 0$ und $\theta = \alpha$ bei, welche Annahme der Stabilität günstig ist, so hat man hier (§. 3) da $f . tg\,\theta = \text{cotg}\,\alpha\, tg\,\theta = 1$

$$P = \tfrac{1}{2} p \left(\sqrt{1 + f^2} - \sqrt{u^2 + f^2}\right)^2 (H + h)^2$$

$$M = \tfrac{1}{6} p \left\{ 1 + 2f^2 + 3u^2 + \frac{2u^3}{f^2} - \frac{2}{f^2} \sqrt{1 + f^2} (u^2 + f^2)^{\frac{3}{2}} \right\} (H + h)^3$$

wo u (Figur 1)

$$u=\frac{GH}{BG}=\frac{h_1}{H+h}=\frac{a-f(x-m)}{a+1}=1-\frac{1+f(x-m)}{a+1}$$

und

$$a=\frac{h}{H},\, x=\frac{e}{H},\, m=\frac{b}{H} \text{ ist.}$$

Hieraus erhält man wie §. 15 für den Hebelarm von P

$$\frac{M}{P}=\tfrac{1}{3}(H+h-h_1)(1+U)$$

indem man

$$U=\frac{f^2u+(2+f^2)u^3-2u^2\sqrt{1+f^2}\sqrt{u^2+f^2}}{f^2(1-u)(1+u)^2}$$

$$=\frac{f^2(1-u)u}{f^2+(2+f^2)u^2+2u\sqrt{1+f^2}\sqrt{u^2+f^2}}$$

setzt; und man erhält (§. 7) anstatt der Gleichgewichtsgleichung (n) §. 19 hier die folgende

$$(s)\quad\begin{cases} x^2+\frac{2}{3}\frac{p}{p_1}f(x-m)^2(x+\frac{1}{2}m) \\ =\frac{\delta p}{3p_1f^2}[f^2+2f^4+3f^2u^2+2u^3-2\sqrt{1+f^2}(u^2+f^2)^{\frac{3}{2}}](a+1)^3 \\ =\frac{\delta p}{3p_1}(\sqrt{1+f^2}-\sqrt{u^2+f^2})^2(a+1)^2\{1+f(x-m\}(1+U). \end{cases}$$

27. Für den Fall Figur 2 wo $CG<CH$ d. i. $a<f(x-m)$ und u negativ ist, erhält man statt der vorigen Gleichung die folgende (§. 9)

$$(t)\quad x=\sqrt{p\frac{\delta f^2(\sqrt{1+f^2}-f)^2(a+1)^3+(a+fm)^3-f^3m^3}{3f^2(p_1+ap)}}$$

wo δ immer $=1{,}912$ und wo $\sqrt{1+f^2}-f$ den Werth von $tg\,\frac{1}{2}\alpha$ darstellt (§. 6)

28. Wenn die Breite der Berme gleich ist der Dicke der Mauer, oder $m=x$, so erhält man ebenso (§§. 5 und 8)

$$u=\frac{a}{a+1}$$

und

$$x=\sqrt{\frac{\delta p}{3p_1}\left\{1+2f^2+3u^2+\frac{2u^3}{f^2}-\frac{2}{f^2}\sqrt{1+f^2}(u^2+f^2)^{\frac{3}{2}}\right\}}\,(a+1)^{\frac{3}{2}}$$

oder durch die Transformation des folgenden §. 30

$$(u)\quad x=\sqrt{\left\{\frac{\delta p}{3p_1}\cdot\frac{4u^3+f^2(1+3u)}{f^2+2f^4+3f^2u^2+2u^3-2\sqrt{1+f^2u}\,(u^2+f^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}}$$

welche Formel für alle Werthe von u, d. i. von $a=0$ bis $a=\infty$ gilt.

29. Um eine Tafel der Werthe von x, die einer Reihe äquidistanter Werthe von a entsprechen, für eine gewisse Annahme der Werthe von p, p_1, f und m zu bilden, kann man sich zuerst der Formel (t) bedienen, die unmittelbar x giebt und die anwendbar ist, so lange $a < f(x-m)$; ist aber $a > f(x-m)$, so muß man die Gleichung (s) anwenden.

Jedoch wird die Auflösung dieser Gleichung nach §. 16 rc. sehr weitläufig und daher die folgende Auflösung vorzuziehen sein.

30. Dividiert man die Gleichung (s) durch $\frac{2}{3}\frac{p}{p_1}\{1+f(x-m)\}^3$ oder durch $\frac{2}{3}\frac{p}{p_1}(a+)^3(1-u)^3$, da (§. 26)

$$a+1=\frac{1+f(x-m)}{1-u}$$

und multipliziert dann oben und unten den Bruch

$$\frac{f^2+2f^4+3f^2u^2+2u^3-2\sqrt{1+f^2}(u^2+f^2)^{\frac{3}{2}}}{f^2(1-u)^3},$$

der als Faktor im zweiten Gliede übrig bleibt, mit der Summe sämtlicher Glieder des Zählers, positiv genommen, so wird der Bruch die folgende Form erhalten:

$$\frac{4u^3+f^2(1+3u)}{f^2+2f^4+3f^2u^2+2u^3+2\sqrt{1+f^2}(u^2+f^2)^{\frac{3}{2}}}=V$$

unter der er keine unbestimmte Werthe mehr für $u=1$ oder $a=\infty$ annimmt, weshalb er zur Bestimmung der Grenzen von x oder der

Dicken der Halbbekleidungen dienen kann (§. 21). Setzt man endlich zur Abkürzung der Substitutionen

$$fx = x_1, fm = m_1$$

so wird die Gleichung (s) endlich

$$(s_1)\quad \frac{(\frac{3}{2}\frac{p_1}{p} - \frac{3}{2}m_1 + x_1)x_1^2 + \frac{1}{2}m_1^3}{(1 - m_1 + x_1)^3} = \frac{1}{2}\delta f^2 V = 0{,}956 f^2 V,$$

und durch sie lassen sich leicht die Werthe von x für verschiedene a bei konstant angenommenen Werthen von f, m, p und p_1 berechnen.

31. Zuerst konstruiere man sich eine Hülfstafel der Werthe von $\frac{1}{2}\delta f^2 V$ für einen bestimmten Werth von f, von $u = 0$ bis $u = 1$. Es wird hinreichend sein, u um 0,1 wachsen zu laßen. Dann berechne man daraus eine andere Hülfstafel für die Werthe des ersten Gliedes, nachdem man vorläufig darin für $\frac{p_1}{p}$ und $m_1 = fm$ Zahlen substituiert, die sich auf die jedesmalige Annahme beziehen. Dann gebe man dem x Werthe die um 0,05 wachsen und zwar von demjenigen Werthe an, der ein unmittelbar kleineres Resultat giebt als

$$0{,}956 \frac{f^2}{(\sqrt{1 + f^2} + f)^2}$$

bis zu demjenigen, der ein unmittelbar größeres Resultat giebt als

$$0{,}956 \frac{f^2}{1 + f^2},$$

welche Werthe respektive das zweite Glied $0{,}956 f^2 V$ der Gleichung (s_1) für $u = 0$ und $u = 1$ annimmt. Es wird zweckmäßig sein, mit $x_1 = 0{,}6 f$ etwa anzufangen und abwärts und aufwärts diese Größe zu verfolgen.

Dies vorausgesetzt, suche man in dieser zweiten Tafel die auf einander folgenden Zahlen, zwischen denen sich jede derjenigen der ersten Tafel befindet und man wird durch die Zertheilung der Differenz zwischen den entsprechenden Werthen von x und x_1 in proportionelle Theile, bis zu einem hinreichen Grade von Genauigkeit,

so viele Werthe von x, die denen von u entsprechen, bestimmen können, als man will. Aus diesen erhält man dann die von a durch die Relation §. 26

$$1+a=\frac{1+f(x-m)}{1-u}=\frac{1+x_1-m_1}{1-u}.$$

Um eine regelmäßige Tafel der x für sukzessive Werthe von a zu erhalten, bediene man sich der bekannten Interpolationstafeln oder der Zeichnung einer Kurve, deren Abszissen die gefundenen Werthe von a und deren Ordinaten die entsprechenden Werthe von x sind.

32. Dies ist in der That der Weg, der bei der Berechnung der folgenden Tabelle benutzt ist; da aber die fraglichen Kurven eben so viele unendliche hyperbolische Schenkel bilden, die zu Asymptoten Horizontallinien haben, die über der Axe der Abszissen oder der a in Entfernungen liegen, die gleich sind den entsprechenden Grenzen von x für $u=1$ oder $a=\infty$, so kann man durch das rein geometrische Verfahren mit hinreichender Annäherung nur die ersten Zahlen der regelmäßigen Tafel erhalten und muß die folgenden Werthe durch eine Interpolationsmethode berechnen, die darin besteht, daß man zur Darstellung der hyperbolischen Schenkel annähernd eine Gleichung von der Form annimmt

$$x=x_1-\frac{k}{g+a},$$

worin x_1 der Grenze von x für $u=1$ oder $a=\infty$ bedeutet, die man (§§. 30 und 31) durch die Gleichung vom 3ten Grade

$$f^2x_1{}^2(\tfrac{3}{2}\frac{p_1}{p}-\tfrac{3}{2}fm+fx_1)+\tfrac{1}{2}f^3m^3=0{,}956\frac{f^2}{(1+f^2)}\{1+f(x_1-m)\}^3$$

erhält. Die beiden andern Konstanten k und g werden durch gleichzeitige Werthe von x und a bestimmt, die man unter den zuerst mittelst der Gleichung (s_1) gefundenen auswählen muß, und zwar unter den größten von ihnen.

So z. B. findet man für mittlere Erde und mittleres Mauerwerk und für $m=0$ die Formel:

$$x = 1{,}243 - \frac{1{,}5443}{1{,}43 + a},$$

welche bis auf $\frac{1}{95}$ genau die Werthe von x giebt, die den Werthen von a zwischen $a = 1$, ja selbst zwischen $a = 0{,}6$ und $a = \infty$ entsprechen.

33. Anstatt wie zuerst bemerkt ist, die Werthe von x zu berechnen, die dem $u = 0$, $u = 0{,}1$, $u = 0{,}2$, x entsprechen, könnte man auch eine Kurve konstruieren, die diese letztern zu Abszissen und jene zu Ordinaten hätte dann müßte man noch für jeden der gegebenen Werthe von a den entsprechenden Werth von x mittelst der Relation

$$u = \frac{a - f(x - m)}{a + 1}$$

berechnen, die, da sie x und u nur in der ersten Potenz enthält, eine Gerade darstellt, deren Durchschnitt mit der Kurve zur Ordinate die gesuchte Größe x enthält. Die Konstruktion dieser Geraden kann übrigens sehr leicht geschehen, da sie für jeden besondern Werth von a durch den Punkt geht, dessen Koordinaten $u = 1$ und $x = m - \frac{1}{f}$ sind. Die letzte Größe ist negativ und liegt der Punkt daher unter der Axe der Abszissen oder der u. Alsdann hat man nur noch einen zweiten Punkt zu konstruieren, der sich nur mit a verändert und dessen konstante Ordinate z. B. gleich dem Werthe $m + \frac{1}{f}$ genommen werden kann, der der Abszisse $u = \frac{a-1}{a+1}$ gleich ist, die man jedesmal auf der, durch die Ordinate bestimmten, Horizontalen abtragen muß.

34. Besonders zu bemerken ist bei dieser letztern Methode, daß die Kurven in u und x eine im allgemeinen wenig vom Kreisbogen abweichende Form haben, so daß man nur die drei Werthe zu konstruieren brauchte, die den Werthen von $u = 0$, $u = 0{,}5$, $u = 1$ z. B. entsprechen, um unmittelbar und hinlänglich genau den Werth von x zu finden, welcher einem beliebigen gegebenen Werthe von a entspricht. Allein diese Bemerkung, die zur Abkürzung der Berechnung einer Tafel dienen kann, würde nicht von Nutzem sein, sobald

man nur einen einzelnen Werth von x finden wollte, da man für drei bestimmte Werthe von u die Gleichung (s_1) auflösen muß, was, wenn gleich sie dann nur vom dritten Grade ist, nicht ganz leicht ausführbar ist.

Dieselbe Bemerkung gilt übrigens auch für die Interpolationsformel §. 32 in Bezug auf die größeren Werthe von x und a, vorausgesetzt, daß sie drei Parameter x_1, k und g enthält, deren allgemeine Relation mit den Konstanten f, m, p und p_1 nicht leicht aufzufinden zu sein scheint, selbst wenn man den Grad der Annäherung auf denjenigen beschränkt, welchen die praktischen Formeln verlangen; zum wenigsten sind meine Untersuchungen hierüber ohne Erfolg geblieben.

Wir werden bald sehen, daß die Sache sich anders verhält mit den kleinen Werthen von a d. i. mit den geringen Erdaufwürfen; zuvor jedoch sollen die Resultate der numerischen Rechnungen, die in der folgenden Tabelle zusammengefaßt sind, erklärt werden.

Allgemeine Tafel über die Stärke der vertikalen Erdbekleidungen mit einem Erdaufwurfe, die für die Annahme des Umsturzes dieselbe Stärke besitzen, wie das Vaubansche Profil für 10^m Höhe und für eine 2^m hohe Erdüberhöhung; ausgedrückt in Theilen der Höhe.

Werth von $a=\frac{h}{H}$	Werthe von $x=\frac{e}{H}$ für $p_1=p$ $f=0,6$; die Berme ist		Werthe von $x=\frac{e}{H}$ für $p_1=p$ $f=1,4$; die Berme ist		Werthe von $x=\frac{e}{H}$ für $p_1=1,5\,p$ $f=1$; die Berme ist			Werthe von $x=\frac{e}{H}$ für $p_1=\frac{5}{3}p$ $f=0,6$; die Berme ist		Werthe von $x=\frac{e}{H}$ für $p_1=\frac{5}{3}p$ $f=1,4$; die Berme ist	
	= 0	= 0,2H	= 0	= 0,2H	= 0	= 02,H	= e	= 0	= 0,2H	= 0	= 0,2H
0,0	0,452	0,452	0,258	0,258	0,270	0,270	0,270	0,350	0,350	0,198	0,198
0,1	0,498	0,507	0,282	0,290	0,303	0,306	0,303	0,393	0,398	0,222	0,229
0,2	0,548	0,563	0,309	0,326	0,336	0,342	0,326	0,439	0,445	0,249	0,262
0,3	0,604	0,618	0,338	0,361	0,368	0,375	0,343	0,485	0,489	0,274	0,283
0,4	0,665	0,670	0,369	0,394	0,399	0,405	0,357	0,532	0,522	0,303	0,299
0,5	0,726	0,717	0,402	0,423	0,436	0,431	0,368	0,579	0,549	0,332	0,314
0,6	0,778	0,754	0,436	0,450	0,477	0,457	0,377	0,617	0,572	0,360	0,328
0,7	0,824	0,790	0,472	0,476	0,512	0,481	0,385	0,645	0,593	0,387	0,343
0,8	0,867	0,820	0,510	0,501	0,544	0,504	0,391	0,668	0,610	0,413	0,357
0,9	0,903	0,848	0,541	0,524	0,575	0,523	0,398	0,690	0,624	0,437	0,371
1,0	0,930	0,873	0,571	0,546	0,605	0,540	0,405	0,707	0,636	0,457	0,384
1,2	0,983	0,916	0,632	0,586	0,654	0,574	0,411	0,737	0,655	0,498	0,410
1,4	1,023	0,945	0,684	0,624	0,696	0,602	0,416	0,762	0,672	0,537	0,428
1,6	1,056	0,970	0,730	0,658	0,734	0,622	0,420	0,780	0,685	0,566	0,445
1,8	1,084	0,990	0,772	0,690	0,769	0,640	0,423	0,797	0,697	0,594	0,461
2,0	1,107	1,004	0,812	0,714	0,795	0,655	0,425	0,811	0,705	0,622	0,475
2,5	1,151	1,037	0,902	0,778	0,848	0,690	0,431	0,833	0,722	0,680	0,506
3,0	1,180	1,060	0,981	0,835	0,892	0,717	0,435	0,852	0,731	0,726	0,531
3,5	1,203	1,074	1,047	0,883	0,928	0,738	0,438	0,862	0,737	0,765	0,551
4,0	1,222	1,084	1,105	0,926	0,957	0,755	0,442	0,872	0,742	0,800	0,568
4,5	1,237	1,093	1,158	0,962	0,981	0,768	0,444	0,878	0,747	0,833	0,583
5,0	1,247	1,101	1,206	0,994	1,002	0,779	0,445	0,883	0,751	0,862	0,596
5,5	1,254	1,109	1,250	1,021	1,019	0,788	0,447	0,886	0,756	0,885	0,607
6,0	1,259	1,116	1,290	1,047	1,034	0,796	0,448	0,891	0,759	0,903	0,617
7,0	1,269	1,122	1,357	1,087	1,059	0,811	0,449	0,898	0,764	0,941	0,633
8,0	1,276	1,128	1,415	1,121	1,079	0,822	0,451	0,903	0,768	0,968	0,646
9,0	1,280	1,133	1,465	1,153	1,095	0,830	0,452	0,906	0,770	0,992	0,657
10,0	1,283	1,137	1,508	1,182	1,109	0,839	0,452	0,909	0,771	1,013	0,667
15,0	1,298	1,150	1,662	1,271	1,149	0,864	0,455	0,917	0,777	1,088	0,696
20,0	1,309	1,156	1,757	1,327	1,171	0,878	0,456	0,922	0,780	1,129	0,712
25,0	1,312	1,160	1,821	1,363	1,185	0,887	0,457	0,924	0,782	1,146	0,723
30,0	1,316	1,162	1,866	1,389	1,194	0,894	0,458	0,926	0,783	1,174	0,730
∞	1,337	1,175	2,144	1,541	1,243	0,927	0,461	0,934	0,789	1,279	0,769

Folgerungen und Gebrauch dieser Tafel.

35. Wie in §. 20 finden wir auch hier eine ziemlich kleine endliche Grenze für die Dicke der Mauer bei unendlichem Werthe von a. Sie zeigt ferner, daß, wenn die Ueberhöhung der Erde dieselbe bleibt, die Dicke der vertikalen Erdbekleidungen in etwas größerm Verhältnisse wächst, als ihre Höhe, so daß bei ein und derselben Mauer die Stabilität in verschiedenen horizontalen Lagen nothwendig von oben nach unten zu abnimmt, und also die unterste Schicht die der geringsten Stabilität ist, selbst auch für Halbbekleidungen; dies Princip das nicht à priori einzusehen ist, gilt ebenfalls für Mauern mit äußerer Ausladung, vorausgesetzt daß die Neigung n mit der Vertikallinie nicht über $\frac{1}{6}$ sei.

Der §. 23 aufgestellte Satz über den bedeutenden Einfluß der Natur des Mauerwerks und der Erde auf die Mauerstärken wird durch diese Tafel bestätigt, so daß es als zweckmäßig erscheint, die Gewichte derselben vor dem Bau erst genau durch Versuche zu ermitteln, wobei die natürliche Böschung durch die aufgeworfene Erde, das Gewicht aber durch die ziemlich mit Wasser gesättigte Füllerde bestimmt werden muß.

Wenn gleich die vorige Tafel, die ganz wie die §. 20 angeordnet ist, nicht ausführlich genug ist, um durch eine einfache Interpolation für einem gegebenen Fall immer die Mauerstärke bestimmen zu können, so wird doch die Rechnung durch sie bedeutend abgekürzt, indem sie unmittelbar mehr oder wenig genäherte Werthe kennen lehrt.

36. Nimmt man z. B. an, es solle die Dicke einer vertikalen Mauer, in Theilen der Höhe ausgedrückt, für $f = 0{,}8$ und $p_1 = 1{,}2p$, $a = 2{,}0$, $m = 0{,}1$ gefunden werden: so wird sie nach der Tafel zwischen 1,107 und 1,004 liegen, also etwa $= \frac{1}{2}(1{,}107 + 1{,}004) = 1{,}06$ sein, wenn $p = p_1$ und $f = 0{,}6$; dagegen liegt sie zwischen 0,795 und 0,655, ist also ungefähr 0,725, wenn $p_1 = 1{,}5p$ und $f = 1$ wäre. Die Grenzen sind also 1,06 und 0,725, woraus sich der erste Näherungswerth $= \frac{1{,}06 + 0{,}725}{2} = 0{,}9$ ergiebt. Substituiert man dann diese genäherte Wurzel in die Gleichung (s) §. 26, und in den Ausdruck für u, in x, der wegen

$p_1 = 1{,}2p$, $f = 0{,}8$, $a = 2$ und $m = 0{,}1$ hier

$$a = \tfrac{1}{5}(2{,}08 - 0{,}8x),\ x^2 + \tfrac{4}{9}(x - 0{,}1)^2(x + 0{,}05)$$
$$= 14{,}337\,\{2{,}28 + 3u^2 + 3{,}125u^3 - 4{,}0505(0{,}64 + u^2)^{\frac{3}{2}}\}$$

wird, so findet man für das erste Glied dieser Gleichung 1,08022 und für das zweite 0,55295, so daß also der Werth 0,9 zu groß ist und die Wurzel zwischen 0,9 und 0,725 liegt, also etwa 0,8 ist. Substituiert man diesen Werth statt x, so wird das erste Glied 0,82511 und das zweite 0,78861, so daß 0,8 noch etwas zu groß ist. Theilt man nun die Differenz 0,1 von 0,9 und 0,8 in Theile proportional den absoluten Differenzen $1{,}08022 - 0{,}55295 = 0{,}52725$, $0{,}82511 - 0{,}78861 = 0{,}0365$, zwischen den respektiven Werthen des ersten und zweiten Gliedes, die man für die beiden Substitutionen erhält, so ergiebt sich endlich

$$x = 0{,}8 - \frac{0{,}03650}{0{,}56375}\,.\,0{,}1 = 0{,}794$$

mit hinlänglicher Genauigkeit.

Hätte man statt $a = 2{,}0$ gehabt $a = 2{,}22$, welcher Werth sich nicht unmittelbar in der Tafel findet, so hätte man statt der vier Dicken 1,107, 1,004, 0,795 und 0,655 die dem Werthe $a = 2$ entsprechen die neuen Dicken $1{,}107 + \frac{0{,}22}{0{,}50}\,0{,}044 = 1{,}126$; $1{,}004 + \frac{0{,}22}{0{,}50}\,.\,0{,}033 = 1{,}019$ ꝛc. nehmen können, da 0,044, 0,033 die Zunahmen sind, die den vorigen Zahlen in dem Intervall von $a = 2$ bis $a = 2{,}5$ zukommen.

Praktische Formeln zur Berechnung der Stärke der Erdbekleidungen für den Fall des Umsturzes.

37. Die Ansicht der Tafel §. 34 zeigt, daß die Stärken für bedeutende Erdüberhöhungen in Bezug auf die Größen p, p_1, f und m einen sehr verwickelten Gang nehmen und erscheint es folglich schwierig, sie einer hinreichend genauen empirischen Formel zu unterwerfen. Diese Schwierigkeit findet, wie es schon am Ende des erwähnten §. bemerkt ist, nicht Statt, wenigstens nicht in demselben Grade, sobald die Höhe des Erdaufwurfs nicht bedeutend die

Höhe der Mauer übersteigt, was vorzüglich daher rührt, daß die Kurven oder die Theile der Kurven (§§. 31 und 32) die zu Abszissen und Ordinaten die erstern Werthe von a und x haben, welche zuerst (§. 27) durch den Ausdruck (t) dann (§. 26) durch den Ausdruck (s) sich ergeben, sehr wenig von der geraden Linie abweichen und daher annähernd durch eine Gleichung dargestellt werden können, die der des §. 23 analog ist, und die für mittlere Erde und mittleres Mauerwerk schon bestätigt ist.

38. Für die Ausdehnung dieser einfachen Formel auf alle in der Tabelle §. 34 angezeigten Fälle findet man die Fehlergrenzen die man begehen kann, aus folgender Zusammenstellung.

1. Wenn die vertikale Erdbekleidung keine Berme hat, so kann man bis auf $\frac{1}{13}$ oder $\frac{1}{14}$ genau von $a=0$ bis $a=1$ d. h. von einer Erdüberhöhung an, deren Höhe Null ist bis zu derjenigen, die der der Erdbekleidung gleich ist, die Formel

$$x=0{,}86\,tg\,\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{\frac{p}{p_1}}(1+a)=0{,}86(\sqrt{1+f^2}-f)\sqrt{\frac{p}{p_1}}(H+h)$$

für alle in der Tafel angezeigten Annahmen über die Natur der Erde und des Mauerwerks, gelten laßen.

2. Wäre die Berme zwischen **0** und **0,2**H, wo H die Höhe des Mauerwerks bezeichnet, enthalten, so ist in der vorigen Formel mit noch geringerm Fehler als vorhin statt **0,86** der Koeffizient **0,85** zu setzen, wodurch sie beinahe mit der im Anfang des §. **23** angeführten Formel zusammenfällt.

3. Die größten Fehler bei beiden Formeln fallen mit dem größten und kleinsten Werthe von a, d. h. mit $a=0$ und $a=1$ zusammen, so daß für die Zwischenwerthe der zu befürchtenden Fehler sehr gering im allgemeinen ist.

39. Allein durch die Zeichnung der oben erwähnten Kurven kann man zu noch weit genähertern Resultaten kommen, ohne die Formel auf eine merkliche Art zu verwickeln. Versucht man diese Kurven durch solche gerade Linien zu ersetzen, daß die größten relativen Fehler der Ordinaten die kleinstmöglichen zwischen $a=0$ und $a=1$ seien, so findet man, daß diese Geraden für $m=0$, d. i. für eiue Erdbekleidung ohne Berme, merklich gegen den Punkt konvergieren, der zur Abszisse $a=-1{,}126$ und zur Ordinate

$x = -0{,}055$ hat, und daß sie die Axe der x in Punkten treffen, deren Entfernungen vom Anfangspunkte das **1,0443**fache der Ordinaten sind, welche den entsprechenden Durchschnittspunkten der Kurven zugehören, so daß, wenn man allgemein i diese Ordinaten nennt, die für $m = a = 0$, wovon hier die Rede ist, und für eine Vaubansche Stabilität der Bekleidung, aus dem Ausdrucke (§. 27)

$$i = 0{,}7982\, tg \tfrac{1}{2}\alpha \sqrt{\frac{p}{p_1}} = 0{,}7982\, (\sqrt{1+f^2} - f) \sqrt{\frac{p}{p_1}}$$

folgen, so ergiebt sich

$$x = 1{,}0443\, i + \frac{(1{,}0443\, i + 0{,}055)}{1{,}126}\, a$$
$$= 0{,}74\, tg \tfrac{1}{2}\alpha \sqrt{\frac{p}{p_1}}\, (a + 1{,}126) + 0{,}0488\, a$$

welche auf $\frac{1}{22}$ genau für alle Annahmen von f und $\frac{p}{p_1}$, die in der Tafel gemacht sind, gilt.

40. Da die Berme einen merkbaren Einfluß besitzt, wenn man (§§. 21 und 26) die Dicken bei geringen Erdaufwürfen etwas vermehrt und umgekehrt sie bei sehr hohen Aufwürfen vermindert, so ist darauf annähernd Rücksicht genommen, indem immer für die Grenzen $a = 0$ und $a = 1$, ein Glied $km(1 - a)(a - g)$ hinzugefügt ist, welches die angezeigte Eigenschaft besitzt und worin k, e, g numerische Koeffizienten sind, die so bestimmt werden müßen, daß sie den größten relativen Fehler von x zum Mimimum machen.

Die Diskussion und Vergleichung der Resultate, die der obige Werth von x giebt, mit den Zahlen der Tafel §. **34** für $m = 0{,}2$ haben die Nothwendigkeit gezeigt, die Größen $f = \cot g\, \alpha$ und $\frac{p}{p_1}$ als Faktoren oder Divisoren des Konstanten l und k einzuführen, wodurch man den Ausdruck erhält:

$$0{,}56\, m\, tg\, \alpha \left(0{,}6 \frac{p}{p_1} - a\right)(a - 0{,}25)$$

und folglich die Formel:

$$(v)\quad \begin{cases} x = 0{,}74\, tg\,\tfrac{1}{2}\alpha \sqrt{\dfrac{p}{p_1}}(a + 1{,}126) + 0{,}0488\, a \\ -0{,}56\, m\, tg\,\alpha\,(a - 0{,}6\,\dfrac{p}{p_1})(a - 0{,}25) \end{cases}$$

welche mit einem hinlänglichen Grade von Genauigkeit die Resultate der Tafel zwischen den Grenzen $a = 0$ und $a = 1$ und für Bermen, die kleiner sind als $\frac{1}{3}$ der Mauerhöhe, giebt, denn auch hier noch sind die Relationen zwischen den Größen m, γ, p und p_1 unter sich und mit der Veränderlichen a zu verwickelt, als daß man eine bequeme, einigermaaßen angenäherte Formel dafür hoffen könnte.

41. Dieselbe Betrachtung leitet auf den Wunsch, die Anwendungen dieser Formel auf solche Werthe des Stabilitätskoeffizienten auszudehnen, die von **1,912** sehr verschieden sind. Die Quadratwurzel aus diesem Werthe kommt implizit als Faktor in dem Ausdrucke für i vor, der dann die allgemeine Form annimmt

$$i = 0{,}798\, tg\,\tfrac{1}{2}\alpha \sqrt{\frac{\delta p}{1{,}912\, p_1}} = tg\,\tfrac{1}{2}\alpha \sqrt{\frac{\delta p}{3\, p_1}}$$

was statt der Formel (v) die folgende giebt:

$$(x)\quad \begin{cases} x = 0{,}927\, tg\,\tfrac{1}{2}\alpha \sqrt{\dfrac{\delta p}{3\, p_1}}(a + 1{,}126) + 0{,}0488\, a \\ -0{,}56\, m\, tg\,\alpha\,(a - 0{,}6\,\dfrac{p}{p_1})\,(a - 0{,}25). \end{cases}$$

Wenn im allgemeinen die Konstanten oder Koeffizienten einer Interpolationsformel Funktionen von mehren gegebenen Größen der Aufgabe sind, so wird es um so schwieriger, dafür einen angenäherten analytischen Ausdruck zu finden, da man ihn aus einer Menge Kombinationen dieser gegebenen Größen berichtigen muß. Deshalb muß man auf die Hoffnung verzichten, für starke Erdaufwürfe eine einfache hinreichend genaue Formel zu erhalten. Zum Glück kommt aber ein Erdaufwurf selten vor, der höher wäre als die Höhe der Mauer, so daß also $a = 1$ die Grenze in den meisten Fällen wird, und außerdem folgt aus Audoy's Rechnungen*), daß alsdann die Erdbekleidung mehr durch Gleiten leide, als durch Umsturz um die untere Kante.

*) Mémorial Nro. 11 pag. 355 Anmerkung

Zweites Capitel.

Von den vertikalen Erdbekleidungen für den Fall des Gleitens.

42. Das eben angeführte Ergebnis der Audoyschen Rechnung kann häufig von Wichtigkeit sein, wo man nur den Fußpunkt einer Böschung schützen will, weshalb wir hier auch auf die Audoyschen Rechnungen eingehen und namentlich alle Willkühr aus der Bestimmung des Stabilitätskoeffizienten für das Gleiten zu entfernen suchen wollen.

Formeln und Tafeln für diesen Fall.

43. Behält man die Bezeichnungen und Annahmen §§. 1, 15, 26 bei, so hat man hier (§. 7) die Bedingungen für das Gleichgewicht der Stabilität in Bezug auf das Gleiten der vertikalen Mauern auf der Basis AB Figur 1

$$(y) \quad f^2(x-m)^2+2\frac{p_1}{p}fx=\delta_1\frac{f}{f_1}(\sqrt{1+f^2}-\sqrt{u^2+f^2})^2(1+a)^2$$

wo (§. 26)

$$u=\frac{a-f(x-m)}{a+1}, \text{ oder } a+1=\frac{1+f(x-m)}{1-u}$$

und $a<f(x-m)$ oder u positiv ist.

Substituiert man für $a+1$ seinen Werth in x und u, so wird

$$(z) \quad \frac{pf^2(x-m)^2+2p_1fx}{p\{1+f(x-m)\}^2}=\delta_1\frac{f}{f_1}\frac{(1+u)^2}{(\sqrt{1+f^2}+\sqrt{u^2+f^2})^2}.$$

44. Für kleine Ueberhöhungen (Figur 2), wo die Bedingung stattfindet

$$a<f(x-m)$$

hat man (§. 9), vorausgesetzt, daß $n=0$, $tg\,\theta=tg\,\alpha=\frac{1}{f}$, $tg\,\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{1+f^2}-f$ rc.,

$$(z_1) \quad x=p\,\frac{\delta_1 f(\sqrt{1+f^2}-f)^2(a+1)^2+f_1a(a+2fm)}{2ff_1(p_1+ap)}.$$

45. Andererseits wird man sich erinnern, daß man, wenn die Breite der Basis *CI* (Figur 1) des Erdprismas à priori gegeben ist, die die Oberfläche der Mauer bedeckt, die vorletzte Gleichung §. 11 anwenden muß, die unmittelbar den Werth von x oder e ohne die Auflösung der vorigen Gleichung (z) giebt.

46. Für den besondern Fall, wo die Breite der Berme der Breite der Mauer gleich ist, oder wo $m=x$, $u=\frac{a}{a+1}$, giebt die Gleichung (z) unmittelbar

$$x=\frac{\delta_1 p}{2f_1 p_1}\frac{(2a+1)^2}{\{(a+1)\sqrt{1+f^2}+\sqrt{a^2+f^2(a+1)^2}\}^2}$$

für alle Werthe zwischen $a=0$ und $a=\infty$.

Für $a=\infty$ wird

$$x=\frac{\delta_1 p}{2f_1 p_1(1+f^2)}$$

wodurch man die endliche Grenze der Stärke der vertikalen Erdbekleidungen für den fraglichen Fall erhält.

47. Die Gleichung (y) oder (z) ist im allgemeinen vom 4ten Grade in Bezug auf a und x und muß man sie daher durch Annäherung nach §§. 31 sequ. auflösen, sowohl für jeden besondern Fall, als auch für die Berechnung von Tafeln bei verschiedenen Annahmen von m, f, p und p_1.

Die Berechnung der Tafeln ist hier aber sehr erleichtert, da die Gleichung (z) entwickelt nur vom 2ten Grade rücksichtlich x ist, und daher diese Größe direkt für gegebene Werthe von u giebt, woraus dann der entsprechende Werth von a folgt.

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{(1+u)^2}{(\sqrt{1+f^2}+\sqrt{u^2+f^2})^2}=V^2, \quad \delta_1\frac{f}{f_1}V^2=q$$

und bringt man die Gleichung (z) unter die Form

$$(w)\quad (q-1)f^2(x-m)^2+2\left(q-\frac{p_1}{p}\right)f(x-m)+q-2\frac{p_1}{p}fm=0$$

so erhält man daraus unmittelbar, wenn man sie nach $f(x-m)$ auflös't

$$x = m - \frac{pq - p_1}{f(pq - p)} \pm \frac{1}{f}\sqrt{\left(\frac{pq - p_1}{pq - p}\right)^2 - \frac{pq - 2p_1 fm}{pq - p}}.$$

Beide Wurzeln können positiv zugleich sein und führen so im allgemeinen auf zwei Systeme von gleichzeitigen Werthen des x und a, die im entgegengesetzten Sinne fortgehen und zuletzt in dem gemeinschaftlichen Werthe

$$x = m - \frac{pq - p_1}{f(pq - p)}$$

zusammenkommen, der für das Verschwinden der Wurzelgröße eintritt, d. i. wenn u so gewählt wird, daß

$$\left(\frac{pq - p_1}{pq - p}\right)^2 - \frac{pq - 2p_1 fm}{pq - p} = 0 \text{ oder}$$

$$q = 1 + \frac{(p_1 - p)^2}{2pp_1(1 - fm) - p^2} = q_1,$$

welchen besondern Werth von q wir q_1 nennen wollen, denn für jeden größern Werth von u hat man nach der Natur der Funktion V, die immer mit u wächst von $u = 0$ bis $u = 1$

$$q > 1 + \frac{(p_1 - p)^2}{2pp_1(1 - fm) - p^2} \text{ oder}$$

$$\left(\frac{pq - p_1}{pq - p}\right)^2 - \frac{pq - 2p_1 fm}{pq - p} < 0$$

vorausgesetzt, daß

$$2pp_1(1 - fm) > p^2 \text{ oder } m < \frac{p_1 - \frac{1}{2}p}{fp_1}$$

für alle Fälle der Anwendung. Da folglich die Werthe von x und a imaginär werden, so würde es unnütz sein, die Substitutionen noch weiter fortzusetzen.

48. Uebrigens erhält man diese Grenze von u, die dem q_1 entspricht und die wir u_1 nennen wollen, direkt durch die Gleichung des zweiten Grades

$$\frac{1 + u_1}{\sqrt{1 + f^2} + \sqrt{u_1^2 + f^2}} = V_1 = \sqrt{\frac{q_1 f_1}{\delta_1 f}}$$

welche, wenn man die negative Wurzel $u_1 = -1$ vernachläßigt, die der Aufgabe ganz fremd ist, giebt

$$u_1 = \frac{2V_1\sqrt{1+f^2} - 1 - V_1^2}{1 - V_1^2}$$

Dieser Ausdruck darf nur gebraucht werden, wenn er kleiner als 1 ist, oder $V_1 = \sqrt{\frac{q_1 f_1}{\delta_1 f}} > \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}$, da man mit den Substitutionen aufhören muß, wenn $u=1$ und dadurch $a=\infty$ wird.

49. Diese Diskussion wird dazu beitragen, die nöthigen Rechnungen bei der Aufstellung einer Hülfstafel der Werthe von x und a, wovon §. 31 die Rede war, zu vermindern, sie wird auch noch gestatten, à priori den Gang in jedem Falle zu entdecken, den der erste dieser Werthe nimmt und zumal für den allgemeinen Fall die Bedingungen erkennen laßen, unter denen die Stärke x einer endlichen Grenze fähig ist, selbst wenn die Höhe des Erdaufwurfs in's unendliche wächst.

Da die Größen p_1, p, f und m immer endliche Größen sind, so sieht man aus dem allgemeinen Ausdruck von x (§. 47), daß er die Form $\frac{1}{0}$ nur für den einzigen positiven Werth von u annehmen wird, der $pq - p = 0$ macht, d. i. für $q = 1$, d. h.

$$V^2 = \frac{f_1}{\delta_1 f}, \text{ oder } V = \sqrt{\frac{f_1}{\delta_1 f}}.$$

50. Da dieser Werth von u natürlich unterhalb der besagten Grenze (§. 48) liegt, so leuchtet ein, daß die Substitutionen daselbst nicht stehen bleiben dürfen; bei dem Durchgange durchs unendliche ändert aber x sein Zeichen, die eine der Wurzeln der Gleichung (w) hört also auf, die gesuchten Stärken zu geben, während die andere noch ferner positive Werthe für x liefert. Von diesem Umstande kann man sich leicht Rechenschaft ablegen, wenn man bemerkt, daß die Bedingung $q = 1$ nur eine einzige Wurzel der fraglichen Gleichung unendlich macht, da, wenn man darin x endlich macht, das Glied $(x-m)^2$ verschwindet, und sie einfach

$$x = \frac{p(1-2fm)}{2f(p_1 - p)}$$

als Ausdruck der andern Wurzel giebt, die in der That endlich und positiv bleibt, so lange $p_1 > p$ und $m \leqq \frac{1}{2f}$.

Ueber die Grenze der Dicke und über den Einfluß der Wahl des Stabilitätskoeffizienten.

51. Geht man auf die allgemeine Aufgabe zurück und fragt sich, welches die Bedingung sei, damit die Mauerdicke eine endliche Grenze beibehalte, selbst wenn die Höhe des Erdaufwurfs unendlich wird, so folgt aus §. 49, daß der Werth von x die Form $\frac{1}{0}$ nur annehmen kann, wenn die Größe q oder $\delta_1 \frac{f}{f_1} V^2$ zwischen $u=0$ und $u=1$ liegt. Der letzte Werth entspricht immer einem unendlichen Werthe der Höhe des Aufwurfs. Da nun die Funktion

$$V^2 = \left(\frac{1+u}{\sqrt{1+f^2}+\sqrt{u^2+f^2}}\right)^2$$

beständig in diesem Intervalle wächst und ihr größter Werth (§ 16) dem $u=1$ entspricht, wofür sie einfach wird:

$$V^2 = \frac{1}{1+f^2}, \text{ woraus } q = \frac{\delta_1}{f_1} \frac{f}{1+f^2},$$

so folgt (§. 47), daß die Stärken der Erdbekleidungen nothwendig eine endliche Grenze behalten, wenn dieser größte Werth von q kleiner als die Einheit bleibt, d. h. so lange

$$\frac{\delta_1}{f_1} < \frac{1+f^2}{f};$$

das Minimum des Ausdruckes $\frac{1+f^2}{f}$ entspricht dem Falle, wo $f=1$ oder wo die Böschung der Erde $=45^0$ ist; dann ist sein Werth $=2$. Die Dicken der Erdbekleidungen werden also immer eine endliche Grenze haben, wenn

$$\delta_1 < 2f_1 \text{ oder höchstens } = 2f_1.$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so können sie zugleich mit der Höhe des Erdaufwurfs ins unendliche wachsen.

52. Hieraus sieht man, welchen enormen Einfluß die Wahl des Stabilitätskoeffizienten auf die Bestimmung der Stärke der Erdbekleidungen haben kann, sobald die Erdaufwürfe sehr stark werden, und wie nöthig es ist, in dieser Hinsicht feste Grundsätze aufzustellen, wenn man nicht auf Abmeßungen gerathen will, die die Maaßen und Kosten übersteigen, oder eine solide Konstruktion nicht zulaßen. Wollte man insbesondere den Audoyschen Koeffizienten $\delta_1 = 2{,}38$ nehmen, wobei nach Boistard $f_1 = 0{,}75$ ist, so erhielte man $\delta_1 = 3{,}17 f_1$ und würde also auf Dicken gerathen, die schnell mit der Höhe der Erdaufwürfe ins unendliche wachsen. A fortiori würde dies der Fall sein mit demjenigen Werthe von δ_1, den man mit Berücksichtigung des Gewichtes derjenigen Erde erhielte, die auf die Oberfläche der Mauer wirkt, auf welches Audoy nicht Rücksicht genommen hat; denn geht man seine Rechnungen in dieser Annahme durch, und behält zur Vergleichung das Vaubansche Profil von 10^m Höhe bei, wenn zugleich (§. 15) $f = 1$, $p = \frac{2}{3} p_1$, so fände man $\delta_1 = 3{,}3 f_1$ anstatt $3{,}17 f_1$, oder $\delta_1 = 2{,}475$ anstatt $\delta_1 = 2{,}38$.

Wir glauben nicht, daß man eine solche Zahl zur Berechnung der Mauerdicken, selbst nicht den Endwerth 2,3 von Audoy*) für den Stabilitätskoeffizienten annehmen dürfe. Die Gründe dafür sollen bald angezeigt werden. Da jedoch der Gebrauch gewissermaaßen die Betrachtungen geheiligt hat, die zu seiner Ableitung dienen, so glauben wir den Einfluß der Größe des Verhältnisses von $\delta_1 : f_1$ auf den Gang der Stärken von e für die besondere Annahme $f = 1$, $p = \frac{2}{3} p_1$ verfolgen zu müßen.

53. Da der größte Werth von $\delta_1 : f_1$, bei dem diese Mauerdicken noch einen endlichen Werth behalten, $= 2$ (§. 51) ist und der aus den Vaubanschen Profil folgende Werth $= 3{,}3$ ist, so haben wir sukzessive (§. 47 sequ.) für die besagte Annahme Tafeln der Stärken berechnet für die Grenzen $\delta_1 = 2f$, $\delta_1 = 3{,}3 f$ und für den mittlern Werth $\delta_1 = 2{,}65 f_1$, um den merklichen Einfluß dieser Daten auf die Aufgabe und die Grenze der Erdaufwürfshöhen zu zeigen, die in allen Fällen größere Werthe annehmen kann, als die sind, welche die Annahme des Umsturzes für den Stabilitätskoeffizienten $\delta = 1{,}912$ (§. 18) liefert.

---

*) Mémorial Nro 11 pag. 355.

Bei der folgenden Tafel ist auch noch ein Auszug aus der §. 34 in Bezug auf die Voraussetzung des Umsturzes beigefügt, wie die Formel

$$e = (0{,}2a + 0{,}1)H + 1^m{,}225$$

die Stärken dafür giebt. Diese Formel giebt für vertikale Mauern und für den Fall des Gleitens die Stabilität des Vaubanschen Profils ohne Strebepfeiler nach dem Prinzip der Transformation der Profile, die im folgenden Kapitel auseinandergesetzt werden soll.

Stärke der Mauer für mittleres Mauerwerk und mittlerer Erde.

Werthe von $a=\frac{h}{H}$	Nach Vaubans Regel	Nach der Voraussetzung des Umsturzes; die Berme ist 0	=0,2H	= e	Nach den Gleichungen für das Gleiten: 1ste Annahme $\delta_1=3,3f_1$ die Berme ist 0	= e	2te Annahme $\delta_1=2,65f_1$ die Berme ist 0	=0,2H	= e	3te Annahme $\delta_1=2f_1$ die Berme ist 0	= e
		In Theilen der Höhe der Mauer									
1,0	0,30 H + 1m,23	0,61	0,54	0,41	0,57	0,39	0,42	0,37	0,31	0,31	0,23
1,1	0,32 H + 1,23	0,63	0,56	—	0,61	—	0,45	0,40	—	0,32	—
1,2	0,34 H + 1,23	0,65	0,57	—	0,65*	—	0,47	0,42	—	0,34	—
1,3	0,36 H + 1,23	0,68	0,59	—	0,68	—	0,50	0,43	—	0,35	—
1,4	0,38 H + 1,23	0,70	0,60	0,42	0,72	0,42*	0,52	0,45	0,33	0,36	0,25
1,5	0,40 H + 1,23	0,72	0,61	0,42	0,75	0,42	0,55	0,46	0,34	0,37	0,26
2,0	0,50 H + 1,23	0,80	0,66	—	0,94	—	0,68	0,54	—	0,43	—
3,0	0,70 H + 1,23	0,89	0,72	0,44	1,35	0,48	0,87	0,68	0,38	0,51	0,29
3,2	0,74 H + 1,23	0,91	—	—	—	—	0,91*	—	—	—	—
3,5	0,80 H + 1,23	—	0,74	—	—	—	—	0,75*	—	—	—
4,0	0,90 H + 1,23	0,96	0,76	—	1,76	—	1,04	0,81	—	0,56	—
5,0	1,10 H + 1,23	1,00	0,78	—	2,18	—	1,20	0,93	—	0,62	—
10,0	2,10 H + 1,23	1,11	0,84	0,45	4,44	0,52	1,92	1,45	0,42	0,75	0,32
15,0	3,10 H + 1,23	1,15	0,86	—	6,99	—	2,95	2,36	—	0,83	—
20,0	4,10 H + 1,23	1,17	0,88	—	9,79	—	4,90	4,11	—	0,85	—
30,0	6,10 H + 1,23	1,19	0,89	0,46	16,24	0,54	8,94	8,80	0,43	0,90	0,33
50,0	10,10 H + 1,23	1,23	0,92	—	32,42	—	17,35	17,30	—	0,93	—
∞	∞	1,24	0,93	0,46	∞	0,55	∞	∞	0,44	1,00	0,33
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Folgerungen

54. Wegen Länge der Rechnung ist die Tafel unvollständig geblieben. Für den besondern Gegenstand jedoch, den wir im Auge haben, genügt es, den Fall zu betrachten, wo das Verhältnis von $\frac{\delta_1}{f_1}$ seinen mittlern Werth 2,65 erhält; dieser zeigt, daß die Berme bei starken Erdaufwürfen einen sehr merklichen Einfluß auf die Verminderung der Mauerstärken hat, wie bei der Annahme des Umsturzes.

Denn vergleicht man zuerst die Zahlen der Kolumne 11 und 12 die sich auf den kleinsten Werth von $\delta_1 = 2f_1$ für das Gleiten beziehen, mit den entsprechenden der Kolumnen 3, 5 und 6 die sich auf den Umsturz und $\delta = 1{,}912$ beziehen, so bemerkt man sogleich, daß für alle Breiten der Berme, die nach der ersten Voraussetzung berechneten Dicken beständig kleiner sind, als die aus der zweiten, worauf man also allein Rücksicht zu nehmen hat, wenn von mittlerer Erde und mittlerem Mauerwerk die Rede ist. Aus der Rechnung ergiebt sich überdies, daß dasselbe für alle Werthe von $p_1 > \frac{2}{3}p$ gilt.

Vergleicht man nun die Kolumnen 6 und 7 für den größten Werth von $\delta_1 = 3{,}3f_1$ mit den entsprechenden 3 und 5, die sich auf den Umsturz beziehen, so sieht man aus den besternten Resultaten der Kolumnen 6 und 7, daß sie und die folgenden Werthe für jede Breite der Berme an die Stelle der durch den Umsturz erhaltenen Resultate gesetzt werden müßen.

Diese Grenze, wo die Resultate des Gleitens größer sind, liegt in den Kolumnen 8 und 9, wo sie durch die Sterne gleichfalls angedeutet wird, weit ferner und das Fehlen des Sternes in der Kolume 10 zeigt, wie schon vorhin bemerkt ist, daß diese Grenze nicht da ist, wenn von einer vertikalen Mauer die Rede ist, wo die Berme der Dicke gleich ist. Man darf jedoch nicht vergessen, daß hier nur von mittlerer Erde und mittlerm Mauerwerk die Rede ist.

55. Wir wollen jetzt die nach Vaubans Profil erhaltenen Dicken in der Kolume 2 mit den aus den Annahmen $\delta_1 = 3{,}3f_1$, $\delta_1 = 2{,}65f_1$ und $\delta_1 = 2f_1$ gefolgerten Stärken vergleichen.

Die ersten dieser Dicken, die aus einer Transformationsformel

(§. 53) abgeleitet sind, die sich nur auf den Fall des Gleitens beziehen, sind für gleiche Werthe von a beziehungsweise kleiner als die ihnen entsprechenden in der 2ten Kolumne §. 20, welche aus einer andern Transformationsformel für den Umsturz folgen. Die letztere Formel, als die für die Solidität günstigere, ist daher bei dem Gebrauche vorzuziehen.

Da die konstanten Glieder dieser Formeln überdies jede direkte und absolute Vergleichung zwischen ihnen und den Resultaten der Kolumnen 6 und 12 unmöglich machen, so genügt es, hier zu bemerken

1) daß, ausgenommen für Halbbekleidungen, deren Höhe H unter 4 und 5^m ist, die Dicken (Kolumne 6) welche aus der Gleichung (z) für $\delta_1 = 3{,}3 f_1$ folgen, allgemein sehr (Kolumne 2) die aus der Vaubanschen Regel erhaltenen übertreffen und auch weit schneller gegen das unendliche konvergieren;

2) daß die Dicken (Kolumne 8 und 9) aus der Annahme $\delta_1 = 2{,}65 f_1$ sich ihnen mehr nähern, zumal für sehr große Werthe von a;

3) daß endlich die Annahme $\delta_1 = 2 f_1$ (Kolumne 11) beständig auf geringere Stärken führt, als die Vaubansche Regel.

56. Hieraus leuchtet ein, daß der Werth $\frac{\delta_1}{f_1} = 3{,}3$ oder $\delta_1 = 2{,}5$ (§. 52) unnütze Uebertreibungen der Stärken liefert, denn die Vaubanschen Mauern mit Erdaufwürfen haben unter allen Umständen gehalten, und die Ingenieure haben sich sogar über die Uebertreibung der Dicken bei diesem Profile für große Erdüberhöhungen beklagt, wie sie dies gleichfalls über die Unzulänglichkeit dieses Profils für die entgegengesetzten Fälle gethan haben.

Da ferner die Kolumnen 8 und 9 mit dem Vaubanschen Profile übereinstimmen, so wird man versucht das Verhältnis $\frac{\delta_1}{f_1} = 2{,}65$ als passend anzunehmen, das einem Stabilitätskoeffizienten $\delta_1 = 2$ ungefähr entspricht, wenn nach Boistard (§.52) $f_1 = 0{,}75$ angenommen wird. Allein man muß zuvor sich überzeugen, ob die Vaubanschen Profile für $f = 1$ und $p_1 = 1{,}5p$ nicht selbst übertrieben sind. Dazu ist es nothwendig näher auf den Einfluß der Reibung und Kohäsion des Mauerwerks einzugehen.

Erfahrungsresultate über die Reibung und Kohäsion des Mauerwerks.

57. In den folgenden Tafeln sollen die Versuche von Rondelet, Morin, Boistard 2c. zusammengestellt werden, sowohl wenn die Reibung allein wirkt, als auch, wenn die Kohäsion des Mörtels mit zur Sprache kommt. Namentlich erhellt aus den Morinschen Untersuchungen*) daß die Reibung gut bearbeiteter Steine denselben Gesetzen folgt, wie diese bei Holz und Metallen stattfinden; sie ist proportional dem Druck, aber unabhängig von der Geschwindigkeit und der Ausdehnung der Flächen; der kleinste Werth findet im Zustande der Bewegung Statt und es muß dieser kleinste Werth für Konstruktionen angewandt werden, die Erschütterungen unterworfen sind; endlich erfolgt der Widerstand nur aus der Reibung oder nur aus der Kohäsion des Mörtels, jenachdem eine oder die andere vorherrscht: d. h. er ist entweder einfach proportional dem Druck, wie groß auch die Ausdehnung der sich berührenden Flächen ist, oder einfach proportional dieser Ausdehnung, wie groß auch der Druck sei. Die Belastung hat bei allen Versuchen Morin's nicht lange genug gedrückt, um bestimmen zu können, ob die Adhäsion oder Kohäsion in der That vom Drucke unabhängig seien, unter dem die Erhärtung des Mörtels anfangs geschah.

---

*) **Nouvelles expériences sur le frottement et l'adhérene des pierres etc. Mémoires publiés en 1835 et 1838.**

Tafel über die Reibung verschiedener Materialien, wenn sie einige Zeit unter dem Druck in Berührung gewesen sind.

Natur der Körper und der Mörtel	Verhälnis der Reibung zum Drucke.
Versuche von Morin.	
Rogenstein auf Rogenstein	0,74
Muschelkalk auf Rogenstein	0,75
Backstein auf Rogenstein	0,67
Eichen (auf dem Hirn stehend) auf Rogenstein	0,63
Schmiedeeisen auf Rogenstein	0,49
Muschelkalk auf Muschelkalk	0,70
Rogenstein » »	0,75
Backstein » »	0,67
Eiche (auf dem Hirn) auf Muschelkalk	0,64
Schmiedeeisen » »	0,42
Rogenstein auf Rogenstein (mit Mörtel aus hydraulischem Kalk und feinem Sand)	0,74
Versuche von andern.	
Gleichförmiger Sandstein auf desgl. (Rennie)	0,71
desgl. mit hydraulischem Mörtel (Rennie) . . .	0,66
Granit auf Granit (Rennie)	0,66
desgl. mit hydraulischem Mörtel	0,49
Harter polierter Kalkstein auf desgl. (Rondelet) . . .	0,58
Marmor auf Marmor (Boistard)	0,78
Hölzerner Kasten auf Steinpflaster (Regnier)	0,58
Werkstücke auf trocknem Thon (Lesbros)	0,51
desgl. auf feuchtem erweichtem Lehme	0,34
desgl. auf feuchtem Lehme, mit grobem Sand bedeckt	0,40

58. Ueber den Widerstand des Mörtels gegen das Gleiten bieten die Morinschen Versuche einige Veränderungen in Bezug auf den Einfluß der Größe der Oberflächen dar, die er durch die Bemerkung erklärt, daß die Austrocknung um so vollkommner und schneller vor sich gehen muß, je kleiner die Oberfläche ist. Da aber hierüber seine Resultate nicht mit den Boistardschen übereinstimmen, die ebenfalls in der folgenden Tafel stehen, so ist es beßer, jedes Urtheil darüber zurück zu halten.

Tafel über den Widerstand verschiedener Materialien gegen das Gleiten, die aus der Adhäsion oder Kohäsion des Mörtels entsteht.

Natur der Steine und des Mörtels	Oberfläche in □ décim.	Alter des Mörtels in Tagen.	Mitlerer Widerstand für den □ décim.
Boistard's Versuche			Kilogr.
Marmor auf Marmor mit Mörtel von hydraulischem Kalk und feinem Sand, an der Luft erhärtet	1 bis 2 3 bis 5	17 Tage 17	66 94
desgl. der Mörtel erhärtet im Waßer .	4,7	487	12
desgl. mit Mörtel aus hydraulischem Kalk und Zement an der Luft erhärtet .	1 bis 2 3 bis 5	17 17	32 53
desgl. nicht zerbrochen, der Mörtel im Waßer erhärtet	4,7	487	110
Morin's Versuche.			
Rogenstein auf Rogenstein mit Mörtel aus 1 Theil hydraulischen Kalk aus Metz und aus 3 Theilen feinen Sand, der freien Luft ausgesetzt	1 bis 2 2 bis 3 2 bis 3 4 bis 6 7 bis 8	83 48 43 48 48	180 120 101 100 94
Gewöhnlicher Backstein, mit demselben Mörtel bestrichen; erhärtet an der Luft	1,3 2,6	48 48	140 100
Rogenstein auf Rogenstein mit Gypsmörtel	2 8	48 48	220 280
Blauer Kalkstein, à griphyte, sehr glatt auf desgl. mit demselben Mörtel bestrichen	2,5 4,5	48 48	110 200

59. Bedient man sich der Zahlen dieser letzten Tafel, um die Dicke der vertikalen Mauer §. 26 und §. 43 zu bestimmen, indem man nur auf die Kohäsion des Mörtes mit der Basis Rücksicht nimmt, so erhält man für die Annahme des Gleitens

$$\frac{\gamma x}{H} = \frac{\delta_1 p}{2} (\sqrt{1+f^2} - \sqrt{u^2+f^2})^2 (1+a)^2,$$

wo γ die Kohäsionskraft für das □ Meter, δ_1 einen paßend gewählten Stabilitätskoeffizienten, p, f, a und u die §. 1 erwähnten Größen bedeuten.

Diese Gleichung, die nach x vom 4ten Grade wegen des Aus-

drucks von u §. 26 ist, läßt sich genau nach §. 43 sqq. auflösen und in Tafeln bringen, wobei wir hier jedoch nicht verweilen, indem es beßer ist, die Kohäsion des Mörtels in der Anwendung zu vernachläßigen. Wir wollen nur bemerken, daß ihr Werth für die Längeneinheit der Mauer ausgedrückt ist durch $\gamma e = \gamma Hx$, während das Gewicht dieser letztern, wenn sie vertikal ist und über ihr sich das Erdprisma ICH Figur 3 befindet

$$= \tfrac{1}{2} fp (x-m)^2 H^2 + p_1 H^2 x \text{ ist.}$$

Die Kohäsion wird größer sein, als die Reibung, wenn

$$\gamma Hx > \tfrac{1}{2} ff_1 p (x-m)^2 H^2 + f_1 p_1 H^2 x$$

oder

$$x < m + \frac{\gamma - f_1 p_1 H}{ff_1 pH}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2ff_1 mpH}{\gamma - f_1 p_1 H}}\right),$$

wodurch zuerst unabhängig von der Höhe der Erdmasse $BHEF$ die Grenze der Dicke der Erdbekleidung erhalten wird, bis zu der dieser Umstand für eine Mauerhöhe H und eine Breite der Berme $b = mH$ stattfindet. Ist z. B. $m = 0$ oder die Erdbekleidung ohne Berme, so muß x oder

$$\frac{e}{H} < \frac{2\gamma}{f_1 fpH} - \frac{2p_1}{fp} \text{ d. h. } e + \frac{2p_1}{fp} H < \frac{2\gamma}{ff_1 p},$$

damit die Kohäsion des Mauerwerks größer sei, als die Reibung, so daß sie überall bei geringen Höhen und Dicken der Erdbekleidungen Einfluß auf das Verhältnis der Gleitung ausübt.

Uebrigens werden die Folgerungen sehr verschieden ausfallen für den Umsturz und bei vollkommnem Mörtel.

60. Es mögen hier jetzt die Versuche Morins über die Reibung der Steine während der Bewegung folgen, welche Reibung allein bei solchen Konstruktionen angewandt werden muß, die dem Stoße und Erschütterungen unterworfen sind.

Ebene sich berührende Flächen	Verhältnis der Reibung zum Drucke.
Rogenstein auf Rogenstein	0,64
Muschelkalk » »	0,67
Backstein » »	0,65
Eiche (auf dem Hirn) auf Rogenstein	0,38
Schmiedeeisen » »	0.69
Muschelkalk auf Muschelkalk	0,38
Rogenstein » »	0,65
Backstein » »	0,60
Eiche (auf dem Hirn) auf Muschelkalk	0,38
Schmiedeeisen (der Länge nach) auf Muschelkalk, trocken .	0,24
desgl. bei benäßter Oberfläche	0,30

Wahl des Stabilitätskoeffizienten für das Gleiten des Mauerwerks

61. Die letzte Tafel und die §. **57** zeigen, daß die Natur der Steine noch großen Einfluß auf die Intensität der Reibung haben, und muß man daher bedauern, daß Morin nur für vollkommen bearbeitete Steine und nicht für blos behauene, wie sie gewöhnlich vorkommen, Versuche angestellt und auch keine Rücksicht darauf genommen hat, ob sich Mörtel zwischen den Steinen befindet. Dennoch kann man aus der Tafel §. **57** schließen, daß dieser Einfluß im allgemeinen für die weichen Steine gering, dagegen für die harten Steine merklich ausfallen werde. Da jedoch bei den Gründungen, wovon hier die Rede ist, das Mauerwerk schlecht bearbeitet, und der Mörtel schon ziemlich ausgetrocknet, wenn auch nicht erhärtet ist, bevor der horizontale Druck auf sie wirkt, so kann man dem Reibungskoeffizienten einen größern Werth beilegen, als aus der letzten Tafel folgt, und man wird noch unter der Wirklichkeit bleiben, wenn man den Koeffizienten **0,67** oder selbst **0,7** annimmt, um die Dicken der Erdbekleidungen zu berechnen.

62. Betrachtet man nun (§.**55**) die Zahl **2,65** als einen geeigneten Werth des Verhältnisses $\delta_1 : f_1$ um die durch das Vauban'sche Profil gefundenen Stärken für Halbbekleidungen zu liefern, so erhält man den Stabilitätskoeffizienten

$$\delta_1 = 2{,}65 . 0{,}7 = 1{,}855$$

etwas kleiner als der, $\delta = 1{,}912$, aus dem Umsturze sich ergebende. (§. 18). Man würde einen noch kleineren Koeffizienten erhalten, wenn man $f_1 < 0{,}7$ nähme. Daraus ergiebt sich, daß eine ähnliche Art zur Bestimmung des Ueberschußes über die nöthige Stabilität gegen die Wirkung des Gleitens bei Mauerwerk, sehr viel Unsicherheit mit sich führt, und daß es vielleicht beßer wäre, in jedem besondern Falle den Werth von δ zu bestimmen.

In dieser Beziehung glauben wir, daß es, selbst für militärische Konstruktionen, der Stabilität sehr angemeßen sein wird, wenn man den Werth

$$\delta_1 = 1{,}86$$

für den Fall des Gleitens annimmt, und daß es in den meisten Fällen ausreicht, namentlich bei sehr hohen Erdaufwürfen, wenn man

$$\delta_1 = 1{,}5 \text{ oder selbst } = 1{,}4$$

nimmt; wodurch man, wenn $f_1 = 0{,}7$ als untere Grenze für den Reibungskoeffizienten bei Mauerwerk angenommen wird, höchstens $\delta_1 = 2 f_1$; $q = 1$ (§. 51) und also immer endliche Dicken erhält, die für die größern Werthe von $p_1 : p$ immer kleiner bleiben, als die durch den Umsturz gegebenen Dicken, was sogleich aus der Vergleichung der in den Tafeln §. 34 für $a = \infty$ gegebenen Werthe mit den aus der fraglichen Annahme entstehenden erhellt, wenn man für p_1, p und f die der Tafel §. 34 entsprechenden Werthe setzt. Man findet nämlich für $a = \infty$ und für die, Tafel §. 34, angegebenen verschiedenen Werthe von p, p_1 und f die entsprechenden Werthe für den Fall

d. Umsturz.	1,337	1,175	2,144	1,541	1,243	0,927	0,461	0,934	0,789	1,279	0,769
d. Gleitens	3,193	2,770	2,358	1,524	1,000	0,337	0,333	0,901	0,501	0,458	0,206

63. Die Schwierigkeit oder vielmehr die Unsicherheit bei der Bestimmung von δ_1 nach dem **Vaubanschen** Profile liegt vorzüglich in dem sonderbaren Einfluß des Verhältnisses $\delta_1 : f_1$ oder der Zahl q (§. 47 und §. 51), die die Stärke der Mauern bis in's unendliche zu verstärken strebt, wenn man ihnen einen gewissen Grad von Stabilität verschaffen will, während es sich ganz anders verhält für den Fall des genauen Gleichgewichts oder einer schwa-

chen Stabilität, für die diese Stärke kleiner bleibt, als die in der Annahme des Umsturzes gefundene.

Die unendlich großen Erdaufwürfe kommen nun zwar nie vor, nichts desto weniger wird man es nie zulaßen können, daß man bei einer Erdbekleidung wie *ABCD* Figur **3**, über die sich ein hoher Erdaufwurf *IEF* erhebt, der z. B. **20** bis **30** mal höher ist als die Höhe der Erdbekleidung, um sie hinlänglich gegen das Gleiten zu sichern, die aus der Rechnung für das genaue Gleichgewicht erhaltenen Dicke *AB*, für die $\delta_1 = 1$ ist, nicht etwa verdoppele oder verdreifache, sondern verhundertfache, selbst indem man dieselben Annahmen für die Reibung und Dichtigkeit der Erde und des Mauerwerks beibehält. Auf diese Folgerung stößt man aber unvermeidlich in dem vorliegenden Falle.

Um den Grund hiervon à priori zu erkennen, genügt die Bemerkung, daß nach der Natur der Aufgabe das Verhältnis des Drucks zum Gewichte des Mauerwerks und der es bedeckenden Erde sich in der That sehr wenig bei großen Ueberhöhungen verändert, selbst für beträchtliche Mauerdicken wie BB_1 z. B., und daß es langsam gegen eine ziemlich kleine Größe konvergiert, die das Verhältnis von $\delta_1 : f_1$ nie übertrifft, das aber einen weit größern Werth bei dem Fall des Umsturzes annimmt, da hier der Hebelarm einwirkt.

64. Aus dieser Diskussion folgt, daß man, wenn der Koeffizient $f_1 = 0{,}7$ für die Reibung des Mauerwerks beibehalten werden soll, man sich aber nicht mit einem Stabilitätskoeffizienten $= 1{,}4$ oder einem selbst noch kleinern begnügen wollte, für sehr hohe Ueberhöhungen ganz auf eine solche Anwendung der Rechnung verzichten muß, obgleich in ihr auf mehre Umstände gar keine Rücksicht genommen ist, die der Stabilität nur günstig sind, und daß man sich eine passende Oekonomie des Mauerwerks zu verschaffen suchen muß, indem man die Form eines in diesem Grenzfalle so ungünstig ausfallenden Profils selbst z. B. dadurch modifiziert, daß man den Fußpunkt der Böschung bis zu der innern Seitenwand der Mauer zurücklegt, für welchen Fall die Dicke nicht gleich der Höhe wird. Diesen Werth würde man kaum erhalten, wenn man $\delta_1 = 2{,}65 f_1$, $p_1 = p$ und $f = 0{,}6$ nähme.

65. Es könnte auch sein, daß die unterste Schicht der Mauer

nicht das Minimum in Bezug auf den Widerstand gegen das Gleiten giebt, wenn die Kohäsion des Mörtels ganz außer Acht gelaßen wird. Hiervon kann man sich durch die Tafel §. 53 überzeugen, die, so wie alle Formeln dieses Capitels, auf jede beliebige Horizontalschicht anwendbar bleibt, deren Höhe unter der Krone $= H$ ist.

Nimmt man z. B. eine Halbbekleidung ohne Berme von 4^m Höhe an mit einem Erdaufwurf von 8^m Höhe, gerechnet bis zur Mitte der Abdachung, so findet man aus dieser Tafel für mittlere Erde und mittleres Mauerwerk und in der Annahme von $\delta_1 = 2{,}65 f_1$: 1) für die Basis der Mauer, wo $a = \frac{8}{4} = 2$, die Dicke e gleich (Kolumne 8) $0{,}68\, H = 2^m{,}72$; 2) für die Schicht, welche $0^m{,}16$ unter der Krone liegt und wo $a = \dfrac{8}{0{,}16} = 50$, $e = 17{,}35\, H$ $= 17{,}35 \,.\, 0^m{,}16 = 2^m{,}776$, welcher Werth in der That größer ist als der vorige.

Dasselbe findet à fortiori für die Annahme von $\delta_1 = 3{,}3 f_1$ Statt; allein die Bemerkung gilt offenbar nur für die obern Schichten der Mauer; sie setzt auch keine Berme voraus, so wie auch keine Berücksichtigung der Kohäsion, die auf diese Schichten jedoch sehr bedeutend einwirkt. Endlich ist der Stabilitätskoeffizient δ_1 mindestens (§. 61) gleich 1,8 vorausgesetzt, und man würde verschiedene Resultate erhalten, wenn man sich mit einer geringern Stabilität begnügen wollte, wie dies die 11te Kolumne der Tabelle zeigt *).

66. Faßt man das in diesem Capitel gesagte zusammen, so glauben wir, daß man das Gleiten nicht zu befürchten hat, so lange nicht die Höhe der zu haltenden Erde 4 mal größer ist als die Höhe der Mauer, oder wenn man der Mauer zur Erhärtung des Mörtels Zeit läßt, bevor man die Ausfüllung vornimmt. In zweifelhaften Fällen genügt es durch die Annahme $\delta_1 = 2{,}65 f_1$ oder selbst $\delta_1 = 2 f_1$ die Resultate zu berichtigen, wenn die Werthe von

*) Diese Diskussion zeigt die Gefahr, die in einigen Fällen entstehen kann wenn man die Erde hinter der Mauer ausfüllt, bevor der Mörtel vollkommen erhärtet ist; sie erklärt zugleich die Ursache der Ausbiegung, die unter gewissen Umständen beobachtet ist, wo die Mauern durch die Enden festgehalten wurden und nichts desto weniger oben und in der Mitte dem Erddruck gewichen sind.

m, x, a u. s. w. die für das angenommene Profil nach den §§. 36 38 seqq. unter Annahme des Umsturzes berechnet sind, das erste Glied der Gleichung (z) oder (y) §. 43 größer als das 2te, für die obern Schichten der Mauer machen.

Uebrigens ändert sich die Sache sehr, wie aus der Sect. III. folgt, wenn von dem Gleiten des Mauerwerks auf der Grundlage die Rede ist. Da ferner die vorigen Formeln sich nur auf Mauern mit vertikalen Seitenwänden erstrecken, so wird es nöthig, zu zeigen, wie man ohne Hülfe neuer Formeln oder Tafeln die vorigen Untersuchungen mittelst einer passenden Transformation des Profils auf Mauern mit äußerer Böschung anwenden kann.

Drittes Capitel.

Von der Transformation der Profile und von der relativen Stabilität der Erdbekleidungen.

Regeln für die Transformation der Profile mit äußerer Böschung.

67. Gewöhnlich betrachtet man die eigentliche Stabilität der Erdbekleidung ohne Berücksichtigung der Aenderung, welche durch die Art der Wirkung der Erde hervorgebracht werden kann; die Aufgabe über die Transformation des Profils mit oder ohne Strebepfeiler reduziert sich dann auf eine einfache Aufgabe der Statik, bei der man der neuen Mauer ein Moment oder eine Reibung auf der Basis geben will, die dem der alten Mauer gleich ist. Es ist aber leicht, wenn man selbst bei Erdbekleidungen mit innerer vertikalen Seitenwand ohne Strebepfeiler stehen bleibt, die Ungenauigkeit dieser Verfahrungsart einzusehen, zumal, wenn es sich um Halbbekleidungen handelt.

Sei z. B. $ABCD$ Figur 4 ein Profil mit äußerer Böschung, und A_1BCB_1 das transformierte Profil der vertikalen Mauer mit gleicher Stabilität, dessen Moment in Bezug auf die vordere Kante A also gleich ist dem des vorigen in Bezug auf die Kante A;

dann sieht man leicht folgendes ein. Läßt man die äußere Böschung IE des Erdaufwurfs, in Bezug auf die innere Wand BC der neuen Mauer, nahe an derselben Stelle, d. h. giebt man der neuen Berme $D_1 I$ eine Breite, die gleich ist der alten Berme $DI + DD_1$, so wird sich sowohl der Erddruck auf diese innere Wand, als auch der Druck auf die Krone um so mehr ändern, je größer die Größe DD_1 und die absolute Höhe $A_1 D_1$ oder BC, die beiden Mauern gemeinschaftlich ist, werden. Nun haben wir aber §§. 21 und 35 gesehen, daß sie trotz des Gegeneinanderwirkens beider Kräfte, dennoch zu sehr merklichen positiven oder negativen Differenzen der Dicken oder Momente, je nach der Größe des Verhältnisses a, führen können.

Dieselbe Bemerkung läßt sich auf den Fall des Gleitens anwenden, wo das Vorhandensein einer Berme die Dicken vermindert; (Tabelle §. 53) und man sieht, daß bei der gegenwärtigen Frage es der Genauigkeit wegen nöthig ist, der Berme des transformierten Profils eine solche Breite zu geben, daß die innere Wand des Profils beinahe dieselbe Lage gegen die Masse der Ausfüllung beibehält. Wir sagen beinahe und nicht genau, da die vordere Kante A oder A_1 der Mauer rücksichtlich der fraglichen Wand eine Verrückung um AA_1 erfährt, die im Fall des Umsturzes den Hebelarm für das Gewicht des, über der Krone sich befindenden, Erdprismas verändert; allein man wird bald sehen, daß diese Verrückung sehr klein bleibt, und daß es nicht nöthig wird, darauf Rücksicht zu nehmen, zumal der Einfluß dieses Prismas an und für sich sehr gering ist.

68. Dies vorausgesetzt, wollen wir zuerst den Fall des Gleitens auf der Basis AB der Mauer betrachten. Dann ist ohne Rechnung klar, daß alle Erdbekleidungen von derselben Höhe und von derselben mittlern Dicke auch denselben Widerstand, dieselbe Stabilität für die angezeigten Voraussetzungen besitzen. Wenn also z. B. der Punkt O die Mitte der äußern Böschung einer gegebenen Erdbekleidung $ABCD$ nach Vauban ist, und man wollte letztere in eine andere von derselben Stabilität rücksichtlich des Gleitens transformieren, deren äußere Ausladung unter einem beliebigen Winkel geneigt ist, so würde es genügen, durch diese Mitte O die Linie zu ziehen, welche die Ausladung in dem neuen Profile vorstellt,

ohne sonst etwas an der Lage der äußern Böschung *IE* des Erdaufwurfs zu ändern.

Diese einfache Bemerkung genügt, die Formel

$$e = 1^m,625 + \frac{1}{5}(H + h - 2^m) - \frac{1}{5}(\frac{1}{2}H) = (0.2a + 0,1)\,H + 1^m,225$$

zu berichtigen, welche in §. 53 angenommen ist, und die unmittelbar die mittlere Dicke e einer Mauer mit beliebiger äußeren Ausladung angiebt, welche gleiche Stabilität mit den Vaubanschen*) Halbbekleidungen giebt. H, h und a haben die Bedeutung §. 1 und die neue Berme ist, wie es eben gesagt ist, verändert.

69. Wir wollen jetzt zu dem Fall des Umsturzes übergehen, der besonders die Praxis interessiert (§. 66) und wollen hier zuerst so einfach wie möglich die Dicke E der Basis AB, Figur 4, einer Mauer $ABCD$ von der Höhe H und von einer Ausladung n bestimmen, damit sie dieselbe Stabilität habe, wie die vertikale Mauer A_1BCD_1 von derselben Höhe und von konstanter Dicke e. Dies Problem kommt genau auf das zurück, welches man auflösen müßte, wenn man unmittelbar auf die Erdbekleidungen mit beliebiger Ausladung die Regeln oder Tafeln des ersten Capitels anwenden wollte. Man hat für den Ausdruck des Moments rücksichtlich der Kanten A und A_1, wenn die innere Wand BC und die Masse das Erdaufwurfs *IEF* bei beiden Mauern sich gleich bleiben,

$$E^2 - \frac{1}{3}n^2H^2 = e^2, \text{ woraus } E = \sqrt{e^2 + \frac{1}{3}n^2H^2}$$

70. Um die Berechnung dieses Ausdrucks zu vereinfachen, der an und für sich keine Schwierigkeit enthält, wollen wir uns eines analytischen Satzes bedienen, der in den feuilles lithographiées du Cours de machines de l'Ecole d'application de Metz (Sect. III note 1re) aufgeführt ist, und wonach

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi)}{\cos^2\frac{1}{4}(\psi_1 - \psi)}A + \frac{\sin\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi)}{\cos^2\frac{1}{4}(\psi_1 - \psi)}B$$

---

*) Bei diesen Halbbekleidungen ist die Dicke an der Basis dieselbe, wie die der ganzen Bekleidung, deren Krone $2^m,5$ unter der Krone des Erdaufwurfs, oder auch $2^m,5 - 0^m,5 = 2^m$ circa unter der mittlern Abdachung liegt, wie dies §. 18 angenommen ist.

mit einem Grade der Annäherung, der durch den Werth von $tg\frac{1}{4}(\psi_1 - \psi)$ für die ganze Ausdehnung der Werthe von $\frac{A}{B}$ zwischen $\frac{A}{B} = \cot g\,\psi$ bis $\frac{A}{B} = \cot g\,\psi_1$ gilt.

In unserm Falle ist

$$A = e,\ B = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,n\,H = 0{,}5774\,n\,H,\ \frac{A}{B} = 1{,}732\,\frac{e}{nH},$$

ferner $\psi_1 = 0$, da das Verhältnis $\frac{A}{B}$ wegen des n unendlich werden kann. Daher wird einfach

$$\sqrt{A^2 + B^2} = (1 - tg^2\,\tfrac{1}{4}\psi)\,A + 2\,tg\,\tfrac{1}{4}\psi\,B$$

mit einem Grade von Genauigkeit, der durch $tg^2\,\frac{1}{4}\psi$ ausgedrückt ist.

Anderseits bleibt n oder die Neigung der äußern Ausladung der Mauer gegen die Vertikallinie immer kleiner als $\frac{1}{7}$ oder $\frac{1}{8}$ bei den neuern Bauten, und aus der letzten Kolumne rechts der Tafel §. 34 sehen wir, daß das Verhältnis von $\frac{e}{H}$ niemals kleiner wird als 0,198 oder 0,2, so daß der kleinste Werth von $\frac{A}{B}$ für alle Fälle der Anwendung größer sein wird als 2,5, woraus man endlich, da diese Zahl als der Werth von $\cot g\,\psi$ zu betrachten ist, erhält

$$\sqrt{A^2 + B^2} = 0{,}991\,A + 0{,}1906\,B$$

genau bis auf $tg^2\,\frac{1}{4}\psi = \frac{1}{110}$ für die ganze Ausdehnung von $\frac{A}{B} = 2{,}5$ bis $\frac{A}{B} = \infty$.

Man erhält also auch bis $\frac{1}{110}$

$$E = 0{,}991\,e + 0{,}110\,n\,H = 0{,}99\,(e + \tfrac{1}{9}\,n\,H)$$

oder

$$e = 1{,}01\,E - \tfrac{1}{9}\,n\,H$$

für alle Anwendungen der Tabelle §. 34, wo die äußere Ausladung der Mauer nicht größer ist als $\frac{1}{7}$.

71. Hiernach läßt sich sehr leicht die Dicke E an der Basis

der Erdbekleidung $ABCD$, Figur 4, mit geneigter äußerer Seitenwand berechnen, nachdem man (§. 36) mittelst der genannten Tafel oder der praktischen Formel (v) §. 40, wenn der Fall es erlaubt, die Dicke e der vertikalen Erdbekleidung A_1BC_1D von derselben Stabilität und deren Berme $D_1 l$ ist, berechnet hat.

72. Diese Formel führt auf eine Methode der Transformation von Profilen, die der §. 68 für den Fall des Gleitens aus einandergesetzten gleich ist; da sie aber die äußere Ausladung kleiner als $\frac{1}{7}$ und das Verhältnis $1{,}732\frac{e}{nH}$ von A und B (§. 70) wenigstens gleich 2,5 vorausgesetzt, so haben wir gesucht, sie so zu ändern, daß sie so wohl einfach, als auch auf eine größere Menge von Fällen anwendbarer sei.

Nimmt man nach dem vorigen näherungsweise an, daß die Dicke der Erdbekleidungen von derselben Stabilität, auf $\frac{1}{9}$ der Höhe über der Basis gemeßen, zwischen gewissen Grenzen unabhängig ist von der Neigung der äußern Böschung, so könnte man genau setzen

$$E = e + \tfrac{1}{9}nH, \text{ oder } E = e + 0{,}1906\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,nH$$

d. h.

$$\sqrt{A^2+B^2} = A + 0{,}1906\,B$$

für alle Werthe von A und B.

Da man aber im Gegentheile auf $\frac{1}{110}$ genau

$$\sqrt{A^2+B^2} = 0{,}991\,A + 0{,}1906\,B$$

hat, so sieht man, daß wenn man fortfährt, das erste Glied der vorigen Formel $= A$ zu nehmen, man den Koeffizienten 0,1906 des zweiten Gliedes um etwas vermindern muß, d. h. man muß in der Formel $E = e + \frac{1}{9}nH$ den Bruch $\frac{1}{9}$ etwas vermindern. Nun lehrt aber die numerische Diskussion, daß, wenn man diesen Bruch durch $\frac{1}{10}$ ersetzt, oder wenn man

$$\sqrt{A^2+B^2} = A + \tfrac{9}{10}\,0{,}1906\,B = A + 0{,}172\,B$$

setzt, dieser Werth auf $\frac{1}{64{,}8}$ genau sein wird, von $A = 2{,}257\,B$ bis $A = \infty$; der Fehler wird 0 für $A = \infty$ oder $B = 0$ d. i. für

$n=0$ oder für vertikale Mauern und wird ein Maximum und positiv $=\frac{1}{63}$ für $A=5{,}81\,B$, und dann wieder 0 für $A=2{,}82\,B$ um dann bis $-\infty$ zu wachsen wenn $\frac{A}{B}$ annimmt; er geht durch den Werth $-\frac{1}{63}$ für $A=2{,}257\,B$, oder wenn $\frac{e}{H}=0{,}198$ zugleich mit $n=\frac{1}{4}$ wird.

Nach der Tafel §. 34 wird dies Verhältnis nur dann die Kleinheit 0,198 erreichen, wenn die Füllerde sehr locker ist und zugleich eine sehr große Reibung besitzt, auch die Höhe der Ueberhöhung $=0$ ist. Für die gewöhnlichen Fälle im Gegentheil wird dies Verhältnis $>0{,}26$, so daß man auch $n=\frac{1}{5}$ annehmen kann, ohne daß der Werth von $\frac{A}{B}$ oder $1{,}732\,\frac{e}{nH}$ merklich kleiner wird als 2,257.

Die Formel

$$E=e+\tfrac{1}{10}nH \text{ oder } e=E-\tfrac{1}{10}nH$$

also endlich, welche die Dicke auf $\frac{1}{10}$ der Höhe der Mauer, unabhängig von der Größe der Ausladung, gemeßen voraussetzt, ist auf $\frac{1}{63}$ genau für alle Fälle der Anwendung, wo man den Stabilitätskoeffizienten nicht kleiner als 1,912 (§. 18) und die äußere Ausladung nicht über $\frac{1}{5}$ annimmt.

73. Man kann sich überzeugen, daß diese sehr einfache Regel zur Transformation, gleichfalls für das gewöhnliche Vaubansche Profil gilt und à fortiori für das der Halbbekleidungen, sobald die Höhe der Mauer nicht über 18^m bis 19^m hoch ist, welcher Umstand allgemein in der Anwendung stattfindet; dies aber setzt immer (§. 67) voraus, daß man die neue Berme so vergrößere, daß die äußere Böschung der Erdüberhöhung dieselbe Lage gegen die innere Seite der beiden Mauern beibehalte.

74. Betrachtet man insbesondere die Halbbekleidungen von Vauban, für die die Dicke der Basis

$$E=1^m{,}625+\tfrac{1}{5}(H+h-2^m)=0{,}2(H+h)+1^m{,}225$$

ist, wo h die Höhe der Mitte der Abdachung des Erdaufwurfs über der Oberfläche der Mauer bedeutet, so hat man also

$$e = 0,2(H+h)+1^m,225 - \tfrac{1}{10}\cdot\tfrac{1}{5}H$$
$$= 0,2(a+0,9)H+1^m,225$$

um auf $\frac{1}{65}$ genau die Dicken der vertikalen Mauer von derselben Stabilität zu berechnen. Da aber selten die Höhe $h > 12$ oder 13^m, so wird auch $\frac{A}{B} > 2,5$, und man kann auf $\frac{1}{110}E$ genau (§. 71) setzen

$$e = 1,01E - \tfrac{1}{9}.\tfrac{1}{5}H = 0,202(a+0,89)H+1^m,237$$
$$= 0,18H + 0,202h + 1,237$$

was die Formel (q) §. 20 rechtfertigt, so wie die ihr folgende Bemerkung, denn in dem transformierten vertikalen Profile A_1BCD_1 (Figur 4) muß die Breite der Berme DI der Genauigkeit (§. 67) wegen als um die ganze Größe $DD_1 = \frac{1}{5}H - AA_1 = \frac{1}{5}H - \frac{1}{45}H$ vermehrt gedacht werden, oder um $\frac{1}{5}H$ da $\frac{1}{45}H$ vernachläßigt werden kann.

75. Da das Vaubansche Profil immer Strebepfeiler enthält, so kann man sie nicht außer Acht laßen, weil sie eine so bedeutende Rolle bei den Bedingungen des Gleichgewichts spielen. Die Ingenieure haben sich auch mit der Art der bei ihnen erforderlichen Transformation beschäftigt, um sich bei dem Systeme der neuen Mauer, das als ebenfalls durch Strebepfeiler verstärkt angenommen wird, einer gleichen Stabilität, wie bei dem alten, zu versichern, und um dahin zu gelangen, haben sie à priori angenommen, nicht nur, daß ein solches System als ein Stück gedacht, sich um die vordere Kante der Basis drehen könne, sondern auch, daß das Moment seines Widerstandes gegen das Umwerfen dem seines ganzen Gewichtes gleich sei, abgesehen von derjenigen Erde, die über dasselbe hervorragt, und von der Reibung derjenigen Erde, welche sich an die Seiten der Strebepfeiler gelagert hat. Ohne die Gültigkeit dieser Annahme hier zuzulaßen oder zu bestreiten, da weiter unten davon die Rede sein wird, begnügen wir uns, hier folgendes zu bemerken.

1) In Bezug auf die Stabilität gegen das Gleiten auf der Grundfläche der Mauer, wird es hinreichen, für die Strebepfeiler des neuen Profils genau die Dimensionen und Lage der des alten Profils beizubehalten, sowohl rücksichtlich der innern Mauerwand,

als auch gegen die äußere Böschung des Erdaufwurfs, der immer (§. 67) die Oberfläche dieser Mauer um dieselbe Größe bedecken muß; denn weder der Druck noch die Belastung der Grundfläche werden sich verändert haben.

2) In Bezug auf die Stabilität gegen den Umsturz wird man diese nur um eine geringe Größe ändern, wenn man auch hier dieselben Maaßen und Lagen der Strebepfeiler bei dem neuen Systeme beibehält, vorausgesetzt, daß man dem Hauptkörper den Grad von Stabilität giebt, der ihm nach den vorigen Regeln zukommt; denn (Figur 4) die Kante der Grundfläche A_1 dieses Körpers wird um die Größe AA_1 verlegt, die (§. 74) höchstens $\frac{1}{45}BC$ gleich ist, wodurch der Hebelarm des Widerstandes der Strebepfeiler nur um dieselbe Größe verändert wird. Diese Veränderung kann man immer in Rechnung bringen mittelst einer gleichen Verlängerung der Strebepfeiler an der Wurzel, oder durch eine gleiche Verstärkung des Hauptkörpers. Hierdurch erhält das System eine vergrößerte Stabilität, durch die eben keine Uebertreibung der Ausgaben entsteht. Dann kann man den Einfluß der Veränderung der Berme vernachläßigen, die nur (§. 35) für sehr bedeutende Erdaufwürfe merklich wird.

Ueber den Einfluß der Strebepfeiler und namentlich über das Vaubansche Profil.

76. So lange es sich nur um die Transformation einer gegebenen Erdbekleidung mit Strebepfeilern in ein anderes mit verschiedener äußerer Ausladung handelt, für das die Strebepfeiler beibehalten sind, kann man nach dem vorigen dem neuen Systeme eine Stabilität ohne alle Rechnung sichern, die der des alten Systems nahe gleich ist. Sollen aber die Strebepfeiler durch eine gleich dicke Mauer ersetzt werden, so wird die Sache schwieriger, da man genau auf die Art und Weise Rücksicht nehmen muß, wie erstere auf das Gesammtsystem der Widerstände in Folge der Kohäsion einwirken, durch die sie mit dem Hauptkörper verbunden sind und auf die Veränderung, die sie auf die Wirkungsart des Druckes ausüben. Eine Idee hiervon erhält man durch die Untersuchungen Au-

doys*), die auf folgenden Schluß führen: Um den Erdbekleidungen ohne Strebepfeiler denselben Grad von Widerstand zu geben, den das gewöhnliche Vaubansche Profil von **10**^{m} Höhe mit Strebepfeilern besitzt, muß man für den Fall des Gleitens einen Stabilitätkoeffizienten **4,70** und für den Fall des Umsturzes **3,80** nehmen, so daß es rücksichtlich der Oekonomie nachtheilig sein würde, wollte man das erste Profil statt des zweiten wählen. Da diese Koeffizienten in der That nahe doppelt so groß sind, als die welche sich (§§. **18** und **65**) auf den Mauerkörper beziehen, und die reduzierten Dicken der Erdbekleidungen mit mittlern Erdaufwürfen, nahe proportional mit den Werthen desselben Koeffizienten für die Annahme des Gleitens**) und mit den Quadratwurzeln aus ihnen für den Fall des Umsturzes (§§. **38** seqq.) sind, so folgt, daß die Strebepfeiler durch eine gleichförmige Ueberstärkung ersetzt werden müßen, die im ersten Falle der Mauerdicke und im zweiten dem **0,414** fachen dieser Dicke gleich ist. Dies Resultat erscheint um so übermäßiger, da für bedeutende Erdaufwürfe die Stärken noch schneller wachsen und die größte passende Verstärkung die ist, wo man dem Profil ohne Strebepfeiler dieselben statischen Eigenschaften sichert, die es mit Strebepfeilern besitzt.

77. Eine ähnliche Folgerung, wenn sie absolut zugelaßen werden könnte, würde dahin führen, daß man die Bekleidungen ohne Strebepfeiler gänzlich verbannte; es muß jedoch bemerkt werden, daß dabei die Annahme gemacht ist, daß das Mauerwerk hinreichende Festigkeit besitze, um die Strebepfeiler beständig mit der Bekleidung selbst verbunden zu halten, sowohl für den Fall des Gleitens als für den des Umsturzes, welcher Umstand nach den Audoyschen Rechnungen als unbestreitbar erscheinen würde, wenn es sich nur um ausgezeichnetes Mauerwerk, aufgeführt mit hydraulischem Mörtel und zu vollkommener Erhärtung gelangt, handelte. Allein diese Voraussetzungen laßen sich offenbar bei den alten Vaubanschen Erdbekleidungen nicht machen, die doch zur Vergleichung dienen. Diese sind

*) Mémorial Nro. 11 pag. 356.

**) Dieser Umstand erhellt aus der Vergleichung der Kolumnen 6 und 7 Tafel §. 53 mit den entsprechenden der Kolumnen 11 und 12, und mit den Werthen des Koeffizienten δ_1, auf die sie sich respektive beziehen.

aus Mauerwerk von mittlerer Güte und lange vor der Erhärtung des Mörtels mit Erde ausgefüllt.

Die Zerstörung älterer Bekleidungen durch den Spaten oder durch Pulver hat ohnedies oft Beispiele von Strebepfeilern gegeben, die von dem Hauptkörper getrennt waren und meistens, nachdem die Mauer umgestürzt war, mit der Erde verbunden blieben, welcher Umstand unabhängig von aller Rechnung sowohl zeigt, daß der Widerstand der Strebepfeiler gegen das Aufheben derselben im allgemeinen größer ist, als der Widerstand gegen das Abreißen vom Mauerkörper; als auch, daß sie gegen den Druck, der auf sie unmittelbar wirkt, ein Hinderniß entgegensetzen, das stark genug gegen das Umstürzen ist.

78. Solche Beispiele und vorzüglich die Betrachtung des schwachen Haltens, den der Mörtel angenommen hat, wenn man gewöhnlich sich gezwungen sieht, die Ausfüllung vorzunehmen, haben sogar einigen Ingenieuren den Gedanken eingegeben, daß der Hauptkörper des Mauerwerks bei den Vaubanschen Profilen, für sich allein allen Ueberschuß an Stabilität besitze, den die verschiedenen Anwendungen erfordern, so daß also die Strebepfeiler nur einen rein militärischen Ueberschuß an Widerstand geben. Allein diese Meinung, die schon sehr alt ist, ist zu absolut und wir werden im folgenden §. sehen, daß sie im formellen Widerspruche mit der von Vauban selbst in seinem Traité de la défense des places gegebenen steht.

79. Zuerst leuchtet für die absolute Wirkung, die die Strebepfeiler vor der Erhärtung des Mörtels haben, ein, daß sie, selbst wenn sie ganz vom Hauptkörper getrennt sind, diesem eine bedeutende Stütze geben 1) dadurch, daß sie bedeutend die innere Fläche vermindern, die der direkten Wirkung des Druckes ausgesetzt ist; 2) dadurch, daß sie ebenso die eigentliche Energie dieser Wirkung vermindern, sei's durch den Widerstand, den ihre Seitenwände dem Gleiten der Erde entgegensetzen, sei's durch die kegelförmige Form, die der Bruch der Erde annehmen muß, sei's endlich durch die bogenförmige Stütze, die sich in gewissen Fällen zwischen diesen Seitenflächen nach den Erfahrungen von Moreau und Niel in den Nro. 11 und 12 des Memorial, bilden können. Es ist daher falsch, wenn man den Strebepfeilern keinen Einfluß zuschreibt, selbst wenn sie in keiner Verbindung mit dem Mauerwerke stehen, und wenn

gleich es bei dem jetzigen Stande der Dinge beinahe unmöglich ist, diesen Einfluß zu entwickeln, so muß er dennoch zugegeben werden.

Zweitens rechtfertigt nichts die Meinung, daß das Vauban'sche Profil, der Strebepfeiler beraubt, dem Druck der Erde in allen Fällen widerstehen könne, d. h. für alle Arten von Mauerwerk und Erde, auf die es angewandt ist; man kann mit Grund das Gegentheil behaupten, sowohl rücksichtlich der Wirkungen des Gleitens als des Umsturzes zur Zeit der Konstruktion. Diese Behauptung soll hier vollständig ohne lange Rechnungen gerechtfertigt werden, ohne dabei das gewöhnliche Profil von **10**^{m} Höhe mit einem Erdauswurf von nur **2**^{m} Höhe zu verlaßen.

80. Für den Fall des Gleitens findet man bei Erde und Mauerwerk, bei denen $p_1 = p$ und $f = 0,6$ ist, was vielleicht nicht die ungünstigste Annahme ist*), das Verhältnis des Gewichts der Erdbekleidung und der sie bedeckenden Erde zur Wirkung des Druckes nur gleich **1,16**, so daß, die Reibung des Mauerwerks (§. **61**) zu **0,7** des Druckes angenommen, der Widerstand in diesem Falle sich auf $0,7 \times 1,16 = 0,812$ circa vom Drucke reduziert, immer abgesehen von den Strebepfeilern. Man gelangt zu noch abweichendern Resultaten, wenn man die Möglichkeit des Umsturzes betrachtet; denn man findet alsdann für dieselbe Art von Erde und Mauerwerk, daß das Moment des Gewichtes der Mauer und des Erdaufwurfs nur **0,71** von dem des Druckes ist, oder es muß die reduzierte Dicke, d. i. die auf $\frac{1}{10}H$ gemeßene (§. **73**), die in der Wirklichkeit nur **0,342** von dieser (§. **20**) ist, oder $= 0,342\,H$, nach der Tafel §. **34**: $= 0,563\,H$ sein, wenn man der Mauer die durch den Koeffizienten $\delta = 1,912$ erhaltene Stabilität verschaffen wollte, oder $= \frac{0,563}{\sqrt{1,912}} = 0,408$ etwa, wenn vom genauen Gleichgewicht die Rede ist, wo $\delta = 1$, indem sich die Stärken der vertikalen Erdbekleidungen bei geringen Erdaufwürfen nahe, wie die Quadratwurzeln (§. **38**) aus den angenommenen Stabilitätskoeffizienten erhalten.

---

*) Aus einigen Beobachtungen folgt, daß gewisse Ausfüllungen mit groben abgerundeten Kieselsteinen, deren Zwischenräume mit sehr feinem flüßigen Sande ausgeschüttet sind, bis 2300^k per Kubikmeter wiegen können, dabei eine Böschung von nur 33^0 besitzen, für die also $f = 0,577$ ist und da das Gewicht einigen Mauerwerkes von Backsteinen kaum 1700^k per Kubikmeter ist, so folgt $p_1 = 1,35\,p$.

Diese letzten Folgerungen über die Möglichkeit des Umsturzes des gewöhnlichen Vaubanschen Profils, würdn nur sehr wenig modifiziert werden, wenn man auf die Vermehrung der Stabilität Rücksicht nehmen wollte, die aus der Hinzufügung der Strebepfeiler entsteht; denn wir haben §. 76 gesehen, daß die daraus erfolgende Verstärkung des Mauerwerks nicht über 0,414 der reduzierten Mauerdicke oder nicht über $0{,}414 \,.\, 0{,}342\, H = 0{,}142\, H$ sein würde. Daraus erfolgt eine Gesamtdicke $(0{,}342 + 0{,}142)\, H = 0{,}484\, H$, um $\frac{1}{6}$ kleiner als $0{,}563\, H$ wie aus unserer Tafel folgt, und die, wenn man sie auf die wirklichen Proportionen reduziert, nur sehr wenig von $0{,}408\, H$ abweichen werden, wie für das genaue Gleichgewicht erfordert wird.

Zuweilen wendet man auch, bei der Erbauung einer gleichförmig verstärkten Mauer anstatt der mit Strebepfeilern, die Regel an, daß dasselbe Volumen oder dasselbe Moment vorhanden sein muß. Man kann sich bei der gewöhnlichen Eskarpmauer von 10^m Höhe überzeugen, daß dadurch die reduzierte Dicke um höchstens 0,22 ihres Werthes im ersten Falle und um 0,26 im zweiten vermehrt werde, wodurch man also auch nicht die nothwendigen Veränderungen der Stabilität für die gegenwärtige ungünstige Annahme erhält.

82. Ueberdies ist es wichtig zu bemerken, daß Vauban selbst sein Profil in mehren Fällen für unzulänglich ausgab. Für diese erkannte er die Nothwendigkeit, in der ersten Zeit den Mauerkörper noch nicht mit dem Druck der Erde zu belasten, und ihn mittelst Faschinenlagen und sehr festgestampfter Erde oder durch die Annahme der Entfernung der Strebepfeiler von 15 zu 15 Fuß statt von 18 zu 18 Fuß von Mitte zu Mitte wie bei dem gewöhnlichen Profile, zu vermindern.

Für die günstigsten Fälle in Bezug auf die Erde und das Mauerwerk besitzt der Vaubansche Hauptkörper an und für sich schon eine solche Stabilität, daß die Anbringung von Strebepfeilern unnütze Verschwendung sein würde.

83. Um also eine passende Ersparung mit der nöthigen Stabilität zu vereinen, muß man auf die Qualität der Erde und des Mauerwerks Rücksicht nehmen und nicht etwa sich auf mittlere Erde und mittleres Mauerwerk beschränken.

Nimmt man nur Rücksicht auf mittlere Erde und mittleres

Mauerwerk, so wird es in manchen Fällen nicht unpassend sein, den aus den frühern Formeln erhaltenen Stärken, die die Stabilität des Vaubanschen Profils besitzen, noch Strebepfeiler hinzuzufügen; man würde durch nichts berechtigt sein, sie durch eine gleichförmige Verstärkung des Mauerwerkes zu ersetzen; es sei denn, daß man unter Berücksichtigung der gegebenen Erde nnd des gegebenen Mauerwerks den Koeffizienten $\delta = 1{,}912$ nimmt, und mit ihm nach §§. 36, 38 seqq. die Stärken berechnet; denn für alle Fälle der Anwendung, sowohl unter Berücksichtigung des Gleitens als des Umsturzes, scheinen die absolute Größe des Koeffizienten und die §. 2 aufgestellten Annahmen keine Unsicherheit übrig zu laßen.

Ueber die Entstehung der praktischen Regeln zur Berechnung der Stärke der Futtermauern.

84. Die Bekanntmachung des allgemeinen Vaubanschen Profils*) setzt man gewöhnlich in's Jahr 1687; allein mehre Umstände laßen vermuthen, daß es aus einer spätern Epoche herstammt, obgleich sich kein direkter Beweis dafür führen läßt. Nur vier Jahre später im Jahre 1691 gab Bullet in seinem Traité d'architecture pratique eine Regel, die sich nicht auf die Erfahrung, sondern auf eine mechanische Theorie stützt, die trotz ihrer Unvollkommenheit, dennoch in Folge der Berühmtheit des Verfaßers und der vielen Ausgaben seines Buches, von vielen Architekten angenommen zu sein scheint. Diese Regel kommt darauf zurück, daß man die Stärke der vertikalen Terrassenmauer $= 0{,}35$ ihre Höhe setzt, und der Erde dieselbe Dichtigkeit wie dem Mauerwerk zuschreibt.

85. In einem Manuskripte von 1716 aus Metz datirt, das sich im Dépôt des fortifications befindet, nimmt Buchotte die natürliche Böschung der Erde $= 45^0$ und ihr spezifisches Gewicht

---

*) Das Originalprofil, welches Mayniel in seinem Werke über den Druck der Erde bekannt gemacht hat, ist nur ein Auszug aus demjenigen, welches am 16. Mai 1687 zu Traben herausgegeben ist, um bei der Ausführung der Befestignng von Sarrelouis zu dienen; es enthält nichts über Halbbekleidungen, und dieser Umstand läßt in der That vermuthen, daß es später entstand, als die von Bélidor in seiner Science de l'ingénieur im Jahre 1729 gegebenen Regel.

$=\frac{2}{3}$ von dem des Mauerwerks an, was durch ein Raisonnement, blos auf die Annahme des Gleitens und eines Reibungskoeffizienten gleich der Einheit gestützt, dahin führt, daß man das Gewicht der vertikalen Mauer gleich $\frac{2}{3}$ von dem Gewichte des Prisma's macht, welches der natürlichen Böschung der Erde entspricht, d. h. die Mauerdicke $=\frac{1}{2}$ der Höhe zu nehmen. Querlongue hat in einem andern Manuskripte von **1743** nichts desto weniger bemerkt, daß diese Regel nur auf mittlere Erde und mittleres Mauerwerk anwendbar sei, und daß die Proportion mit dem Verhältnis der Dichtichkeiten sich ändern müße. **Trincano 1768, Tersac de Montlong 1774,** und **Gauthey 1784** und **1785** haben sogar die Allgemeinheit dieser Regel zu rechtfertigen gesucht.

86. Namentlich ist es der letzte, durch den diese Regel bei allen — durch die gerechte Achtung gegen seine andern Arbeiten und durch Versuche, mit denen er seine Theorie in den Memoiren der **Académie de Dijon** verbunden hat, verleitet — eine allgemeine Anwendung, sowohl für das Gleiten als auch für den Umsturz gefunden hat. Denn wenn er einentheils die Dichtigkeit der Erde $=\frac{2}{3}$ von dem des Mauerwerks annimmt, was als eine Grenze betrachtet werden kann, so nimmt er auf der andern Seite, durch seine falsch angestellten Versuche verleitet, an, daß der Druck unabhängig sei von dem natürlichen Böschungswinkel der Erde, und daß er gleich $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{3}$ des Drucks vom Prisma unter **45⁰** gleich sei, wodurch eine Art von Kompensation eintritt. Um aber die Fehler solcher Resultate zu zeigen, die aus praktischen Regeln sich ableiten, und um zugleich den Ingenieuren, die gegen die neueren, aus Coulomb's Theorie entsprungenen, Theorien streiten, ihren unrichtigen Wahn zu benehmen, wird es hinreichend sein, zu bemerken, daß nach dem Geist dieser empirischen Methoden der Widerstand der Mauer, die überdies vertikal und ohne Ueberhöhung vorausgesetzt worden, den Druck der Erde höchstens um $\frac{1}{10}$ übertreffen, oder ihm einfach gleich sein könnte, welche Folgerung offenbar absurd ist.

Das für uns wichtige ist: **1)** daß die Regel, welche die Dicke $=\frac{1}{3}$ der Höhe macht, ihren Ursprung unrichtigen Theorien und keiner aufgeklärten Praxis verdankt; **2)** daß sie falsch ist und überall nicht auf die wahren Daten der Aufgabe (§. **24**) Rücksicht nimmt.

87. Bélidors Methode, die sich auf eine verbeßerte Theorie, obgleich verwerflich im Prinzip, stützt, ist von den Ingenieuren nur als Regel angenommen. Was die Vaubansche Methode anlangt, die sich auf ganze und halbe Erdbekleidungen bezieht, so glaubt man, daß sie vorzüglich auf militärische und praktische Betrachtungen gegründet sei, die jeder mechanischen Theorie fremd seien. Deshalb glauben wir hier das Gegentheil beweisen zu müßen und wollen dabei die Prinzipien zeigen, die ihn zu der Regel geführt haben, welche zwar oft bestritten ist, von der man sich aber in der Anwendung nicht hat entfernen mögen.

Nachdem Vauban*) von den verschiedenen Erdbekleidungen mit Mauerwerk geredet hat, fügt er folgendes hinzu: »Ueberdies »darf man keinen großen Widerstand von diesen Erdbekleidungen »erwarten, sie sind nicht in der Absicht gemacht, lange die Kano»nenkugeln abzuhalten, wie viele meinen, sondern nur, um den »Wall zu halten, und um eine offene oder heimliche Ersteigung »zu verhindern, da es gewiß ist, daß, wenn man eine Batterie »von 8 oder 10 Kanonen auf die Böschung eines bedeckten Weges »richtet, um in der, der Bastion entgegengesetzte Seite, Bresche zu »schießen, und man sie gut bedient, sie innerhalb 48 Stunden den »Weg bis unten hin eröffnen würde; sie würde bis zur Erde durch»dringen und jede noch so starke Erdbekleidung umwerfen.«

Vauban hatte also keinen militärischen Zweck bei der Anlage der Strebepfeiler, und das Resultat einer langen Praxis bei Belagerungen ist vollständig durch die neuern, zu Metz unter der Leitung des Artilleriehauptmanns Piobert**), ausgeführten Versuche bestätigt. Hieraus sieht man in der That, daß, wenn die Strebepfeiler nach dem Umsturz der Mauer noch theilweise mit der Erde verbunden bleiben, und also auf ihr Zurückhalten einwirken, es nur einiger Stückkugeln oder Bomben bedarf, um sie gänzlich umzustürzen und die Bresche gangbar zu machen. Dieser Umstand beweis't, daß

---

*) Traité de la défense des places. Edition de Valazé p. 8 art. 16.

**) Traité d'Artillerie théorique et pratique. Vol. I. pag. 422. 1837. Rapport de la Commission sur les principes du tir in dem Mémorial d'artillerie Nro. 4.

die Profile mit verlängerten Strebepfeilern, mit horizontalen oder vertikalen Queerbögen, die schon im Anfange des vorigen Jahrhunderts gebraucht wurden, die militärischen Vortheile nicht besitzen, welche man ihnen zuschreibt.

Aber unser berühmter Ingenieur ist noch ausführlicher in der Instruktion, mit der er sein allgemeines Profil begleitet. Er sagt: »Dies Profil ist verschiedenen Mauerhöhen angepaßt im Verhält- »nis zu dem Gewicht der Erde, das sie zu halten haben; es ist an- »gewandt auf mehr als **500000** Kubiktoisen Mauerwerks, die an **150** »Plätzen verbaut sind.« Dies letzte zeigt deutlich, daß das Profil nicht ein bloßes Resultat einer langen Praxis, sondern auch die Folge von Regeln und Prinzipien ist, die ihrer Anwendung auf militärische Konstruktionen vorausgehen mußten.

Der letzte Artikel dieser Instruktion sagt: »Diese Profile sind »nur für Mauerwerk, welche große Gewichte frisch aufge- »schütteter Erde zu halten haben, und nicht für solche, welche »man an die grüne Erde anlehnt, die vorher nicht bekleidet war, »wie dies bei den meisten Grabenbekleidungen der Fall ist &c.« Hieraus darf man schließen, daß für solche Umstände Vauban die Profile nach seiner Regel zu stark fand. Dies aber reicht nicht zur Erklärung hin, warum Vauban oft auf **4** oder selbst **3** Fuß die Stärke an der Krone reduzierte sowohl bei Kontreeskarpe als auch bei Bollwerken, statt daß sie nach dem allgemeinen Profile **5** Fuß hätte betragen müßen; und eben so wenig erklärt es die Reduktion der äußern Anlage auf $\frac{1}{6}$, wie es die Beispiele Pl. IV. bei ihm zeigen. Man muß annehmen, daß Vauban Vertrauen zu der Festigkeit seines Profils hatte, oder daß er nützliche Ersparungen nach Lokalität und Verhältnissen anzubringen wußte.

88. Die Kritiken von Buchotte, Couplet, Bélidor und aller, die nach ihm sich mit diesem Gegenstande beschäftigt haben, beziehen sich vorzüglich auf den augenscheinlichen Mangel an Proportionalität zwischen den Dicken und Höhen, in Folge dessen die Dicke bei Mauerhöhen über 10^m zu gering und bei Mauerhöhen unter 10^m zu stark wird. Dieser Vorwurf erschien um so gegründeter, als in Folge der falschen Annahme, die man dann über den Werth des Druckes zuließ, und in Folge der Kompensation der Fehler, die bei den Rechnungen stattfand, man (§§. **85** und **86**) zu Resultaten gelangte,

die mit dem allgemeinen Vaubanschen Profile von 10^m Höhe zusammenfielen, und man immer glaubte, den Bedingungen des genauen Gleichgewichts nahe zu bleiben. Hätte man aber auf irgend eine Weise auf den Erdaufwurf Rücksicht genommen, dessen Einfluß in demselben Maaße abnimmt, so würde man auf keine beträchtliche Differenz der Stärke gekommen sein. Auch darf man sich nicht über die geringen Veränderungen verwundern, die die Vaubansche Regel trotz der vielen Angriffe, die auf weniger sichere Prinzipien der Mechanik sich stützten, nur erhalten hat, wie wir jetzt sehen wollen.

Hauptprinzip der Vaubanschen Regel.

89. Untersucht man dies Profil für gewöhnliche Erdaufwürfe etwas aufmerksamer, so erkennt man darin die Absicht, nach einem allgemein angenommenen Prinzip des Keils oder der geneigten Ebenen die Mauerstärken proportional mit den Höhen des zu haltenden Erdaufwurfs wachsen zu laßen. Diese Höhe besteht aus zwei Theilen, deren einer mit der Mauerhöhe wächst und deren anderer konstant ist. Nur hat Vauban, anstatt diese Ueberhöhung einfach $= 2^m$ oder $= 2^m,5$ zu nehmen, ihr einen weit größern Werth, ohne Zweifel in der Absicht gegeben, um der Bekleidung eine hinreichende Stabilität oder Stärke zu geben, die von der eigentlichen Höhe unabhängig ist, wie dies bei verschiedenen Umständen eintritt, so z. B. bei momentanen oder beständigen Erdüberhöhungen, bei Schadhaftwerdung des Mauerwerks, Eindringen von Kugeln ꝛc., welche Umstände in der That nicht mit der Höhe sich verändern. Eine solche Annahme scheint sehr zweckmäßig und mehr den wirklichen Gesetzen der Physik angepaßt, als die, nach welcher man in unsern Tagen den Mauern eine Verstärkung giebt, die nicht konstant ist, sondern proportional mit den Höhen wächst, als wenn die Ursachen der Zerstörung in demselben Sinne zunähmen.

90. Wie dem auch sei, diese Idee einer konstanten Ueberhöhung hat Couplet*) natürlich genug gefunden, um den Erdbekleidungen dadurch die nöthige Stabilität zu geben, und der anonyme Verfaßer eines **Mémoire**, das im **Dépôt des fortifications**

---

*) **Mémoires de l'académie des sciences de 1727.**

als Manuskript niedergelegt ist, sucht hierin das Hauptprinzip des Vaubanschen Profils. Die verwickelten Rechnungen und die Unvollkommenheit der Theorie bei diesen Verfaßern waren wenig geeignet, die Sache in ihr wahres Licht zu setzen, und die Folgerung daraus unbestreitbar zu machen. Dies wird sie aber, wenigstens in Bezug auf den Mauerkörper, wenn man die praktische Formel §§. **23** und **38** mit der Formel $e = 0{,}18\,H + 1^m{,}64$ vergleicht, die gleichfalls bei der Annahme des Umsturzes (§. **74**) die Stärken der vertikalen Mauern von derselben Stabilität, wie die ganze Bekleidung von Vauban, giebt.

Denn um die Formel auf den Fall des genauen Gleichgewichts zurückzuführen, dividiere man den Faktor **0,85** der ersten Formel durch die Quadratwurzel **1,459** aus dem Stabilitätskoeffizienten **2,13**, die implizit (§. **13**) darin vorkommt und setze ferner $f = 1$ oder $\alpha = 45^0$, $p = \frac{2}{3}p$, welche Annahme allgemein zu Vauban's Zeiten angenommen wurde, dann wird sie

$$e = 0{,}2\,H + 0{,}2\,h.$$

Diese Formel giebt Resultate, die beinahe mit denen aus der vorigen Formel übereinstimmen, wenn man darin $h = 8^m{,}2$ für kleine Mauerhöhen H, und $7^m{,}4$ für die größten Mauerhöhen, z. B. für $H = 19^m$ bis 20^m setzt; im Mittel läßt sich also $h = 7^m{,}8$ annehmen; oder wenn man 2^m für die Stärke des Erdaufwurfs abzieht, so erhält man die konstante Erdüberhöhung $= 5^m{,}8$, der eine Verstärkung der Mauer um $0{,}2 \,.\, 5^m{,}8 = 1^m{,}16$ entspricht, die nach Vauban's Ansicht dem Mauerkörper eine hinreichende Stabilität, unabhängig von der Höhe, verschafft.

91. Besonders merkwürdig ist, daß der Werth $h = 7^m{,}8$ beinahe genau mit dem Durchschnittspunkte der innern und äußern Wand bei gewöhnlichen Eskarpemauern zusammenfällt, und daß daßelbe beinahe auch für die Halbbekleidungen stattfindet, wenn man die angenäherte Formel $e = 0{,}2(H + h + 5^m{,}8)$ mit der $e = 0{,}18H + 0{,}202h + 1^m{,}24$ vergleicht, welche (§. **74**) aus der Transformation des allgemeinen Vaubanschen Profils entsteht. Dieser Umstand ist gewiß nicht zufällig und man kann dreist annehmen, nicht nur, daß Vauban die Stärken seiner Erdbekleidungen nach der Annahme einer konstanten Erdüberhöhung von $5^m{,}8$ bestimmte,

sondern auch, daß er für die gewöhnlichen Anwendungen die Genauigkeit der Regel erkannt hat, wonach die Stärken vertikaler Mauern mit einem Erdaufwurf, der die Krone bedeckt, ziemlich proportional der ganzen Höhe der zu haltenden Erde sind. Da bisher nur von dem Mauerkörper des allgemeinen Profils die Rede war, so muß noch gezeigt werden, daß dasselbe der Fall ist, wenn man zur Verstärkung Strebepfeiler anbringt, indem man dieserhalb mit allen ältern Ingenieuren annimmt, daß diese Strebepfeiler mit der Mauer zugleich um die äußere Kante der Grunfläche der letztern sich drehen.

92. Der Vorsprung dieser Strebepfeiler vor der Mauer ist für die gewöhnlichen Erdbekleidungen ausgedrückt durch $0{,}2\,H+0^m{,}65$ und ihre Breite an der Wurzel durch $\frac{2}{3}(0{,}1\,H+0^m{,}65)$, so wie die oben am Ende durch $\frac{2}{3}\,(0{,}1\,H+0{,}65)$; dann findet man als allgemeinen Ausdruck für das fragliche Moment, auf den laufenden Meter des Profils bezogen und unter Annahme der Dicke an der Krone $=1^m{,}625$ (5 Fuß) im Mittel, und für eine Entfernung der Strebepfeiler von Mitte zu Mitte, die gleich ist

1) 5^m (a_1) $0{,}000953\,H^4+0{,}029296\,H^3+0{,}40833\,H^2+1{,}456\,H$
2) 6^m (b_1) $0{,}000794\,H^4+0{,}026638\,H^3+0{,}39444\,H^2+1{,}433\,H$

wo das Glied mit H^4 das immer ziemlich klein ist gegen die andern, so lange $H<12^m$, hier eingeführt ist, weil einentheils Vauban die Breite der Strebepfeiler mit der Höhe wachsen laßen mußte, um ihnen gegen den Bruch einen Widerstand zu sichern, der mit ihrem Gewichte wächst, und weil er anderntheils eine unveränderliche Entfernung zwischen den Mitten der Strebepfeiler beibehalten wollte.

Sucht man jetzt ebenso das Moment einer vertikalen Mauer von derselben Höhe H, deren Dicke im Allgemeinen durch die Formel $e=k(H+h)$ ausgedrückt ist, wo k noch zu bestimmen ist und h die Höhe des Erdaufwurfs, um die Stabilitätsüberhöhung vermehrt, bedeutet, so ergiebt sich dafür der Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\,e^2\,H=\tfrac{1}{2}k^2\,(H+h)\,H^2=\tfrac{1}{2}k^2\,H^3+k^2\,h\,H^2+\tfrac{1}{2}k^2\,h^2\,H$$

wor in nur das Glied H^4 fehlt.

Man darf nicht erwarten, daß der numerische Koeffizient der Formel $e=0{,}2\,(H+h)$ §. 90 der Bedingung genüge, da sie sich

nur auf die Stabilität des Hauptkörpers selbst bezieht. Man findet für $k=0{,}2$ und $h=7^m{,}8$ auch nur

$$0{,}02\,H^3+0{,}32\,H^2+1{,}28\,H.$$

Die Resultate fallen jedoch beinahe genau zusammen, wenn man $k=0{,}2357$ und $h=7^m{,}2$ setzt, denn man erhält das Moment

$$(c_1)\qquad 0{,}027798\,H^3+0{,}40000\,H^2+1{,}440\,H$$

welches zwischen (a) und (b), abgesehen vom Gliede H^4, in der Mitte liegt.

93. Es ist übrigens leicht zu bemerken, warum man hier nicht die Ueberhöhung $p=7^m{,}8$ erhält, denn die Solidität der Verbindung und die Ersparung von Ausgaben haben auf eine Stärke der Strebepfeiler geführt, die mit der Höhe wächst. Wollte man aber dennoch die Werthe $h=7^m{,}8$ und $k=0{,}2357$ beibehalten, so würde man für das Moment der vertikalen Mauer von der Dicke $e=0{,}2357$ $(H+7^m{,}8)$ den Ausdruck erhalten:

$$(d_1)\qquad 0{,}027778\,H^3+0{,}433337\,H^2+1{,}690\,H.$$

Dann muß man aber auch zugeben, daß es den Vauban schen Ansichten gemäß ist, den Einfluß des Gliedes H^4 zum Thei für die mittlere Höhe $H=10^m$ zu verbeßern. Bei dieser Annahme findet man in der That für den Werth des letzten Ausdrucks 88,00 und für den von (a_1) und (b_1): 94,22 und 83,35.

Immer bleibt die Folgerung aus den verschiedenen Annahmen fast dieselbe in Bezug auf die Prinzipien, welche Vauban bei der Aufstellung seines Profils für gewöhnliche Erdbekleidungen haben leiten können.

94. Was die Regel für die Halbbekleidungen betrifft, so wird sie durch die Betrachtung gerechtfertigt, daß man in dem Ausdruck $E=0{,}2\,H+1^m{,}625$ für den Druck des Profils an der Basis und in den folgenden $0{,}1\,H+0^m{,}65$; $0{,}2\,H+0^m{,}65$ rc. für die horizontalen Dimensionen der Strebepfeiler, statt H die Größe $H+h-2^m$ zu setzen hat, um die Dimensionen zu erhalten, welche den Halbbekleidungen von beliebiger Höhe H, mit einem Erdaufwurf von der mittlern und wirklichen Höhe h über der Mauerkrone entspre-

chen. Denn substituiert man diese Werthe in die analytischen Ausdrücke für das Moment: (a_1), (b_1) und (c_1) oder (d_1), wodurch sie anwendbar werden auf Halbbekleidungen mit äußerer geneigter oder vertikalen Seitenwand, so stimmen sie noch in demselben Grade, wie vorhin; dies Resultat ist an und für sich klar, wenn man für Halbbekleidungen die angenäherte Regel

$$(e_1) \qquad e = 0{,}2357\,(H + h + 5^m{,}5)$$

annimmt, wo $5^m{,}5$ die Ueberhöhung für die mittlere Stabilität bezeichnet.

Die vorigen Betrachtungen zeigen, daß die Vaubansche Regel einer weit beßern mechanischen Theorie angehöre, als die ist, welcher sich die Verfaßer der Kritiken bedient haben. Wir wollen aber noch weiter gehen und die Schritte verfolgen, die Vauban hat nehmen können.

Vaubans Prinzipien bei der Aufstellung eines allgemeinen Profiles und Folgerungen daraus.

95. Sei A_1BGH eine vertikale Mauer (Figur 5) durch welche die Erde BGI, welche bis zur obern Kante der Mauer reicht, gehalten wird. Nach der Theorie des Keils oder der geneigten Ebene wird der Druck auf eine beliebige Höhe GM, oder die zur Haltung des Erdprismas GMO auf seiner Böschung OM, die mit der Vertikale einen Winkel v bildet, nöthige Horizontalkraft, wenn man die Reibung vernachläßigt

$$p\,.\,GMO\,\frac{GO}{GM} = \tfrac{1}{2}p\,\overline{GO}^2 = \tfrac{1}{2}p\,tg^2 v.\ \overline{GM}^2$$

woraus sich ergiebt, daß der Druck wie bei flüßigen Körpern proportional mit dem Quadrat der Höhe GM wächst, und daß die Differenz nur von dem Faktor $tg\,v^2$ herrührt, der dort $= 1$ ist.

Diese einzige Bemerkung hat Vauban zeigen können: 1) daß der Mittelpunkt des Druckes ungefähr auf $\frac{1}{3}$ der Höhe des Prismas, von dem Punkte M an gerechnet, liegt, 2) daß die dreiseitige Form ABG des Mauerprofils dem Gleichgewicht eines jeden Theiles GMN sowohl für das Gleiten als für den Umsturz entspricht, end-

lich 3) daß der Winkel GMO oder v des Druckprismas weder Null sein kann, noch $= 45^0$ in Bezug auf die natürliche Böschung der mittlern Erde, da man hierfür in die Annahme einer Flüßigkeit verfallen würde für die auch $tg v = 1$ ist, aber daß er wohl einem Zwischenwerthe, z. B. $\frac{1}{2} 45^0$ gleich sein könne, oder $= GO = \frac{1}{2} GM$, wofür $tg v = \frac{1}{2}$ ist, wie dies Bélidor seit 1729 annimmt, indem er sich dabei auf Erfahrung und Raisonnement stützt.

Betrachtet man hiernach das Gleichgewicht einer beliebigen dreiseitigen Mauer ABG auf dessen ganze Höhe der Druck $\frac{1}{2} p tg^2 v . \overline{BG}^2$ wirkt, so erhält man für den besondern Fall des Umsturzes

$$p_1 \frac{1}{2} AB, BG . \frac{2}{3} AB = \frac{1}{2} p tg^2 v . \overline{BG}^2 . \frac{1}{3} BG$$

woraus

$$AB = tg v \sqrt{\frac{1}{2} \frac{p}{p_1}} BG.$$

Nimmt man mit Bélidor $tg v = \frac{1}{2}$ anstatt $v = \frac{1}{2} 45^0$ und $tg v = 0{,}4142$ nach den jetzigen Theorien und setzt ferner $p = \frac{2}{3} p_1$, so giebt diese Gleichung $AB = \frac{1}{2} \sqrt{1/_3 BG} = 0{,}2887 BG$ anstatt $BG = 0{,}239 BG$, welchen Werth man aus $tg v = 0{,}4142$ erhalten würde.

96. Die erste dieser Auflösungen giebt der Mauer eine äußere Böschung von nahe $\frac{3}{10}$ gegen die Vertikale, welche Vauban nicht zulaßen durfte, obgleich die Konstruktionen seiner Zeit Beispiele von einer äußern Ausladung geben, die gleich $\frac{1}{4}$ der Höhe ist, und indem er den Werth $\frac{2}{10}$ beibehielt, hat er einen Theil derjenigen Vortheile aufgegeben, die den Profilen von gleicher Stabilität zukommen, die er aber durch sein System von Strebepfeilern wieder gewinnt.

Die gewöhnliche Form der Erdaufwürfe für eine Bekleidung wie $ABCD$ z. B. ist nun nicht CGI, sondern $DELI$, wodurch der Druck auf die ganze Höhe GE verkleinert und wodurch der obere Theil der Mauer CD ganz überflüßig zum Halt der Erde gemacht wird. Man kann annehmen, daß Vauban durch die Vergleichung des Momentes des Mauerprismas CDG rücksichtlich des Punktes A, mit denen des Druckes auf GE und des Erdprismas CDE, die beide zu dem von $ABCD$ hinzukommen, an eine beinahe genaue Kompensation zwischen diesen verschiedenen Momenten

gedacht hat. Dies kommt damit überein, daß man den Mauerkörper *ABCD* als beinahe im Gleichgewicht unter dem Druck des Erdkörpers *BELI* annimmt. Man könnte in der That unter dieser Annahme und bei der einer konstanten Stabilitätsüberhöhung, die hier durch $I^1 L^1 L I$ z. B. bezeichnet ist, die allgemeine Anordnung des Profils für gewöhnliche Erdbekleidungen und für Halbbekleidungen erklären. Allein die Vergleichung zwischen dem Momente der Mauer *ABCD* und dem dieses Profils mit seinen Strebepfeilern berechtigt jedoch keineswegs zu diesem Verdachte, und man ist gezwungen auf die Betrachtung der vertikalen Mauern zurückzugehen, hinter denen die Erde nur bis zur Oberfläche ausgefüllt ist, um die wahren Beweggründe und den wahren Anfangspunkt der Vaubanschen Regel aufzufinden.

97. Sei also A^1BGH ein rechtwinkliges Mauerprofil, das dem Druck der Erde auf die ganze Höhe *BG* ausgesetzt ist, so erhält man als Bedingung des Gleichgewichts

$$\tfrac{1}{2} p_1 \overline{A^1B}^2 . BG = \tfrac{1}{6} p\, tg^2 v . \overline{BG}^3 \text{ oder}$$

$$A^1 B = tg v \sqrt{\frac{p}{3p_1}}\, BG$$

und, wenn man wie oben $tg v = \frac{1}{2}$, $p = \frac{2}{3} p_1$ voraus setzt, so findet man $A^1 B = 0{,}2357\, BG$, woraus *)

$$e = 0{,}2357\,(H + h)$$

wo h die Gesamthöhe *CG* der Ueberhöhung bezeichnet.

Nun fällt aber diese Formel, wenn man darin $h + 5^m,5$ statt h setzt, genau mit der (e_1), oben (§. 94) für die Dicke der vertikalen Erdbekleidungen von der Höhe *H* und von der Stabilität des Vaubanschen Profils mit Strebepfeilern, erhaltenen zusammen. Man kann daher annehmen, daß Vauban, durch geometrische Ver-

---

*) Für den Fall des Gleitens auf der Mauergrundfläche würde, wenn f_1 der Reibungskoeffizient, ist

$$f_1 p_1 . A^1B . BG = \tfrac{1}{2} p\, tg v^2 \overline{BG}^2 \text{ oder } A^1B = \frac{p}{2 f_1 p_1}\, tg^2 v . BG.$$

Nimmt man wie zu Vaubans Zeit $f_1 = \tfrac{1}{3}$, $p = \tfrac{2}{3} p_1$, $tg v = \tfrac{1}{2}$ an, so fällt diese Formel nahe mit der vorigen zusammen. Das Gleichgewicht mußte, dem Geiste der Methode nach, gleichfalls in der Annahme des Gleitens der Mauer auf der Grundfläche, sicher gestellt werden.

suche, die sich direkt auf die Daten der Figur bezogen, diese Art der Kompensation für vertikale Erdbekleidungen A^1BCD^1 mit Erdaufwürfen DLI (zwischen dem Moment des wegfallenden Mauerkörpers $CGHD$, zwischen dem Erddreieck CDE, dessen Gewicht zu A^1BCD^1 hinzukommt, und zwischen demjenigen, das aus der Verminderung des Drucks auf die ganze anfängliche Höhe BG entsteht) ausfindig machte, wenigstens, so lange $CG > 2.BC$.

98. Wenn gleich die Bestätigung dieses Resultats etwas delikat ist, zumal rücksichtlich der Bestimmung des Hebelarmes für den Druck, so ist dies doch kein Beweggrund, anzunehmen, daß Vauban nicht dahin hätte kommen können. Denn diese Bestimmung gehört der elementarsten Geometrie an, wovon man sich in der folgenden Sektion überzeugen kann, oder auch, wenn man die ältern Schriften, z. B. Bélidor, nachlies't, worin die Aufgabe für den Fall der Ueberhöhungen in Form von Brustwehren abgehandelt ist*).

99. Wie man übrigens auch über diese Erklärung urtheilen möge, so bleibt dennoch wenigstens bewiesen, daß nach den von den ältern Ingenieuren (§. 75) allgemein über die Strebepfeiler angenommenen Hypothesen, die Stabilität des Vaubanschen Profils rücksichtlich des Umsturzes beinahe dieselbe ist, wie die einer vertikalen Mauer von der Höhe H, deren Stärke nach der Formel (e_1) §. 94 bestimmt ist; und dies liefert auf der Stelle (§. 72) ein Mittel, dies Profil in ein anderes ihm gleiches, das keine Strebepfeiler oder äußere Böschung besitzt, zu verwandeln.

Giebt man die besagte Erklärung zu, so muß man schließen, daß, wenn die Vaubansche Regel in einigen Punkten abweicht, sie es nicht gerade in dem theoretischen thut, sondern daß sie dem $tg\,v$ oder k (§. 92) zu große Werthe **0,5** und **0,236** beilegt, die

---

*) Es ist vielleicht nicht unnütz in dieser Hinsicht zu bemerken, daß wenn man für das Maaß des Druckes auf die rechtwinklige Erdbekleidung A^1BCD^1 (Figur 5) den Ausdruck $\frac{1}{2}p\,tg^2v.\overline{BG}^2$, bezogen auf die ganze Höhe der zu haltenden Erde, annimmt, und wenn man für seinen Hebelarm nur $\frac{1}{3}BC$ annimmt, man wieder genau auf die Formel $A^1B = 0{,}236$ kommen würde; denn dies giebt die Gleichung für das Gleichgewicht

$$p_1\,\tfrac{1}{2}\overline{A^1B}^2.BC = \tfrac{1}{2}p\,tg^2v\,\overline{BG}^2.\tfrac{1}{3}BC \text{ oder } A^1B = tg\,v\sqrt{\frac{p}{3p_1}}.BG,$$

wie oben. Sollte Vauban vielleicht gefunden haben, daß zwischen den Fehlern beider Annahmen die nöthigen Kompensationen eintreten?

man beßer durch 0,4142 und 0,8 etwa ersetzte; ferner liegt diese Abweichung auch nicht einmal in der Ueberstärkung der Dicken (§. 21), die um so bedeutender ist, als die Ueberhöhung $h+5^m,5$ größer wird im Verhältnis zur Mauerhöhe, sondern darin, daß die mittlere Erde und mittleres Mauerwerk zum Grunde liegen.

100. Wollte man übrigens unter Beibehaltung der konstanten Stabilitätsüberhöhung von $5^m,5$, die Vaubansche Regel verallgemeinern, wie er es ungefähr selbst gethan haben würde, so würde es hinreichen (§. 97), den Koeffizienten 0,236 durch den Ausdruck $\frac{1}{2} tg\,\alpha \sqrt{\frac{p}{3p_1}}$ zu ersetzen, wo man auch noch nach der Coulombschen Theorie $tg\,\frac{1}{2}\alpha$ anstatt $\frac{1}{2}\,tg\,\alpha$ nehmen müßte. Dann würde die Stärke der vertikalen Erdbekleidungen, oder die Stärke (§. 72) der Bekleidungen mit äußerer Böschung, auf $\frac{1}{9}$ der Höhe gemeßen,

$$e = tg\,\tfrac{1}{2}\alpha \sqrt{\frac{p}{3p_1}}\,(H+h+5^m,5),$$

bei der die Mauern keine Strebepfeiler besitzen.

Bei dem Gebrauch dieser Formel ist aber zu bedenken, daß sie unabhängig von der Annahme einer Ueberhöhung von $5^m,5$, die nach Vaubans eigener Bemerkung (§. 87) den Contreskarpen und Futtermauern militärischer Werke nicht angepaßt ist, dennoch (§§. 21 und 35) zu Uebertreibungen der Stärken führt für Erdaufwürfe mit breiten Bermen und für bedeutende Erdaufwürfe. In solchen Fällen ist es ökonomischer, wenn man das Vaubansche Prinzip der Stabilität ganz verläßt und die Stärken nach (*s*), (*t*), (*u*) und (s_1) §§. 26 seqq. berechnet oder daß man $\delta=1$ und $h=h+5^m,5$ annimmt, oder wenn man sich der rein geometrischen Verfahrungsarten der folgenden Sektionen bedient.

Will man noch bestreiten, daß Vauban sich in seinen Arbeiten durch die Theorie leiten ließ, so bedenke man, daß man ihm die Grundregel über die Pulverkammern der Minen, die Bahn der ricochet Kugeln und viele andere glückliche Erfindungen, sowohl für den Angriff als auch für die Vertheidigung der Plätze verdankt. Sollte man erstaunt sein, daß seine Zeitgenoßen und vorzüglich die Eloges des académiciens par Fontenelle mit Stillschweigen diese besondern Schriften des großen Mannes übergehen, so geben

wir zur Antwort, daß das Verdienst solcher Arbeiten, wenn sie auch der Bemerkung noch so würdig waren, gegen das Ende seiner Laufbahn durch den Glanz seiner militärischen Glorie verdunkelt wurde.

Zweiter Abschnitt.

Geometrische Untersuchungen über den Druck und die Hebkraft der Erde.

In der ersten Sektion haben wir uns bemüht, die numerischen Berechnungen der am häufigsten vorkommenden Aufgaben über Erdbekleidungen mit vertikaler inneren Seitenwand, so einfach wie möglich zu machen. Allein die Weitläufigkeit der Rechnungen und die verwickelte Form der Gleichungen laßen schwerlich eine Ausdehnung dieser Vereinfachungen auf andere Voraussetzungen über den Stabilitätskoeffizienten, die Breite der Berme, die relative Höhe und die Form der Erdaufwürfe zu. Die Formeln §§. 1 seqq. umfaßen nur einen geringen Theil der Aufgaben, für die eine leichte und strenge Auflösung erforderlich ist. Die verwickelte Form verschwindet jedoch größtentheils, wenn man dieselben Aufgaben geometrisch behandelt.

Erstes Kapitel.

Geometrische Auflösung der vorzüglichsten Aufgaben über die Stabilität der Halbbekleidungen.

Bevor wir auf den allgemeinsten Fall übergehen, wollen wir die Formeln des ersten Abschnittes in rein geometrische Konstruktionen übertragen, indem wir sie nichts desto weniger auf Mauern mit ge-

neigter innern Seitenwand ausdehnen, die bis jetzt noch nie für große Erdaufwürfe behandelt sind.

Konstruktion des Druckes und seines Hebelsarms für die Voraussetzungen der ersten Sektion.

101. Zuerst sollen die Formeln (a) und (b) §. **3** übertragen werden, die die Intensität und das Moment des Druckes einer Erdmasse $BHEF$ (Figur **6**), begrenzt durch die äußere Böschung HE und durch die unbegrenzte Horizontale EF, gegen eine vertikale Ebene BH, geben. Um aber zuerst die Auflösung nicht zu verwickeln, sei HE parallel der natürlichen Böschung der Erde BM oder der Winkel $\theta = \alpha$ (§. 1), welche Annahme in der ganzen ersten Sektion beibehalten ist; wir werden dann sehen, wie sich der allgemeinere Fall, wo HE beliebig genommen wird, auf diesen zurückführen läßt. Behält man ferner die Bezeichnungen und Annahmen wie §. **1** bei und errichtet im Endpunkte B der Linie BH eine Normale BO auf die Linie der natürlichen Böschung BM, so wird sie die Verlängerung der Horizontale EF in O treffen, so daß offenbar

$$BO = \frac{BG}{\sin\alpha} = \frac{H+h}{\sin\alpha},\; OG = BG \operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}\alpha\,(H+h)$$

$$OH = \sqrt{\overline{OG}^2 + \overline{GH}^2} = \sqrt{\operatorname{cotg}^2\alpha\,(H+h)^2 + h_1^2};$$

und folglich, wenn man OH von O nach P auf OB abträgt,

$$BP = \frac{H+h}{\sin\alpha} - \sqrt{\operatorname{cotg}^2\alpha\,(H+h)^2 + h_1^2}$$

was endlich (4) den einfachen Ausdruck giebt

$$P = \tfrac{1}{2}p \cdot \overline{BP}^2.$$

Hieraus folgt, daß der horizontal gegen die Vertikalebene BH ausgeübte Druck gleich ist dem Quadrat der Linie BP, multipliziert mit der halben Dichtigkeit, oder mit dem halben Gewichte eines Kubikmeters Füllerde.

102. Eben so wird man die Bruchlinie BX für das Prisma vom größten Druck finden, wenn man auf BM, $BT=BE$ nimmt, dann in T die Normale TX auf BM errichtet, die die Linie EF in X trifft, wodurch die gesuchte Linie BX gefunden ist. Diese Konstruktion jedoch, durch die man auf das bekannte Resultat $v=\frac{1}{2}\alpha$, für h_1 oder GH gleich Null, stößt, kann dadurch vortheilhaft ersetzt werden, daß man unmittelbar X durch die Parallele PX zur natürlichen Böschung der Erde bestimmt. Es wird in der Folge die Ausdehnung dieses letzten Resultats, auf das ich nicht gleich anfangs kam, auf weit allgemeinere Annahmen über die Form der Ausfüllung angewandt werden.

103. Um nun den Druck P auf eine beliebige Höhe bH zu finden, giebt dieselbe Konstruktion, indem man $bo=BO$ und $oa=oH$ macht

$$P=\tfrac{1}{2}p.\overline{ba}^2.$$

Man erhält also auch für den Druck auf Bb

$$\tfrac{1}{2}(\overline{BP}^2-\overline{ba}^2)=\tfrac{1}{2}p(BP+ba)(BP-ba)$$

welche Größe leicht zu konstruieren ist.

104. Man sieht hieraus, wie man sehr einfach den Werth des Drucks auf einen beliebigen Theil der Vertikale BH finden kann. Fragt es sich z. B. um die unendlich kleine Ausdehnung bb^1 (Figur 7) und entspricht b^1a^1 der Höhe b^1H nach der obigen Konstruktion und ba dem BH, so erhält man für den Druck auf bb^1 oder das Differential des Drucks

$$dP=\tfrac{1}{2}p(ba+b^1a^1)(ba-b^1a^1)=p.ba.ac$$

wo a^1c gleich und parallel bb^1 und $\frac{1}{2}(ba+ba^1)=ba$ einer sehr kleinen zu vernachläßigenden Größe gleich ist.

Multiplizirt man diesen Druck bb^1 mit seinem Hebelarm Bb, so erhält man den Werth seines Momentes. Summiert man dann alle ähnlichen Produkte innerhalb einer gegebenen Ausdehnung z. B. von B bis H, so erhält man das entsprechende Moment M von P.

Diese Art, die Aufgabe zu behandeln, ist die Coulombsche, sie kommt im Grunde darauf zurück, das ganze abfallende Prisma in eine unendliche Anzahl elementarer Schichten, wie z. B.

z. B. $bb^1 xx^1$ zu zertheilen. So haben es beinahe auch die alten Ingenieure, namentlich Bélidor gethan; allein mit dem Unterschiede, daß hier die Schichten nicht parallel zur natürlichen Böschung der Erde sind, sondern von den Linien des wirklichen Bruches, von den Enden b und b^1, und von dem betrachteten Elemente begrenzt werden, also im allgemeinen eine viertheilige Form annehmen.

105. Die Aufeinanderfolge der Punkte P, a, a^1 u. s. w. ist eine kontinuierliche Kurve, bezogen auf die schiefwinkligen Axen BO und BG, deren Ordinaten PB, ab, a^1b^1 parallel zu BO und deren Abszissen o, Bb oder am, Bb^1 oder a^1m^1 u. s. w., nach der Richtung BG gemeßen, sind. Diese Kurve, wovon aa^1 ein Element ist, geht augenscheinlich durch den Punkt H und eine sehr einfache Diskussion zeigt, daß es ein Schenkel einer gleichseitigen Hyperbel ist, deren Mittelpunkt in H liegt, und die zur Asymptote die Gerade GY hat, in welche sie übergeht, wenn H mit G zusammenfällt. Dies findet namentlich für Mauern ohne Erdaufwurf Statt, oder da, wo die Füllung nur bis zur obern Kante der Mauer reicht; dann hat man in der That für alle Parallelen bo bis $BO : oy = oG$, da $oa = oH$ und dann ist der Punkt Y auf OB gegeben, indem man $OY = OG$ setzt. *)

Das Parallelogramm amm^1c, das dem Differentialtrapez amm^1a^1 gleich geachtet werden muß, hat zum Maaße das Produkt $mm^1 . am . \sin mBH = ac . Bb . \cos\alpha$ und wenn man auf die Axe BH, die Linie mn, wodurch die Entfernung des Elementes amm^1a^1 von dieser Axe bestimmt wird, horizontal zieht, so hat man auch $mn = mB . \cos\alpha = ba . \cos\alpha$; also wird das obige Differentialmoment

$$p . ba . ac . Bb = p \frac{mn}{\cos\alpha} . \frac{amm^1a^1}{\cos\alpha}$$

wo $mn . amm^1a^1$ das Moment des Elementartrapezes amm^1a^1 in Bezug auf BG ist.

---

*) Die zweite Asymptote und der zweite Schenkel der Hyperbel würden durch dieselben Längen gegeben sein, wenn man nach außen hin oy und oa, OY und OP um ihre eigene Größe verlängerte; diese Konstruktionen müßen für alle Lagen des b, die über H und G hinaus liegen, vorgenommen werden; dann wird das im Text gesagte leicht zu beweisen sein und beinahe handgreiflich.

Das Moment des Druckes auf die ganze Höhe BH hat also zum Maaße das, auf die Vertikale BG bezogene, Moment des Gewichts eines Erdprismas von derselben Dichtigkeit, dessen Basis das gemischtlinige Dreieck BPH ist, dividiert durch das Quadrat von $\cos\alpha$. Wenn daher g die Entfernung des Schwerpunktes dieses Dreiecks von BG ist, so wird das fragliche Moment

$$M = p . \frac{\text{Oberfläche } BPaHB . g}{\cos^2 \alpha}$$

106. Dies ist die sehr einfache Interpretation der Formel (a) §. **3** für die Annahme $\theta = \alpha$. Dieselbe wird ganz klar und geometrisch, und man wird zugleich die Figur vereinfachen, wenn man die Vertikale BG (Figur **6** und **7**) horizontal, oder parallel auf die Vertikale AG_1 (Figur 8) verlegt, die durch die Rotationsaxe A des Mauerprofils $ABCD$ geht. Dasselbe gilt von allen Punkten, allen Konstruktionen, die davon abhängen und zur Bestimmung des Druckes dienen. Ferner laße man, anstatt die Kurve der so erhaltenen Punkte P, a, a^1 u. s. w. unmittelbar zu konstruieren, ihre schiefwinkligen Ordinaten AP, $b_1 a$, $b^1{}_1 a^1$ u. s. w. um ihre Endpunkte $A, b_1, b_1{}^1$, welche dem B, b, b^1 u. s. w. entsprechen, drehen, so daß man sie auf die horizontale Richtung AP_1, $b_1 a_1$, $b_1{}^1 a_1{}^1$, u. s. w. bringt. Hierdurch erhält man einen neuen Schenkel der gleichseitigen Hyperbel $P_1 a_1 a^1{}_1 H_1$, die immer durch den Punkt H_1, die Horizontalprojektion von H, geht, und zum Mittelpunkt den Punkt G_1 hat, welcher aus G sich ergiebt und zur Asymptote die Gerade $G_1 YY_1$ besitzt, die er mit dem ersten Schenkel gemeinschaftlich hat; vorausgesetzt, daß die Punkte Y und Y_1, wo sie die Verlängerungen von AP und AP_1 trifft, so beschaffen sind, daß zugleich $AY_1 = AY$ und $O_1 Y = O_1 G_1$ ist.

Führt man in der That bei dieser Kurve mit rechtwinkligen Ordinaten die vorhin bei der Kurve, aus der diese folgt, angestellten Raisonnements zum zweiten Male durch, so wird man finden, daß das Moment, in Bezug auf den Punkt A, des Druckes auf ein Element von beliebiger Höhe $bb^1 = b_1 b_1{}^1$ genau gleich ist dem Gewichte eines horizontalen Erdprismas, dessen Basis das Segment $m_1 m_1{}^1 a_1{}^1 a_1$ ist, wenn dies Moment gleichfalls in Bezug auf den Punkt A genommen wird, so daß also das Gewicht der im Profil

durch die Fläche $AP_1 a_1 H_1$ dargestellten Erdmasse und das der Bekleidung $ABCD$, vermehrt um das darüber befindliche Erdprisma ClH, nach den Bedingungen des behandelten Problems sich gegenseitig im Gleichgewicht um die äußere Kante A der Mauergrundfläche halten müßen.

Allgemeiner noch ist das auf den Punkt A bezogene Moment des Druckes gegen eine beliebige Höhe $Bb = Ab_1$ gleich dem der, im Profile durch das gemischtlinige Dreieck $a_1 m_1 P_1$ dargestellten Erdmasse, während das Moment auf die obere Höhe $b_1 H_1$ oder bH gleich ist dem der, durch das gemischtlinige Trapez $a_1 m_1 A H_1$ dargestellten, Erdmasse; die letzten Momente sind beide auf den Punkt A oder auf seine Vertikale AG, zu beziehen. Die angenäherte Bestimmung des Momentes und des Hebelarmes des Drucks auf einen beliebigen gegebenen Theil der durch die Erde gedrückten Oberfläche ist also sehr leicht.

107. Betrachtet man in's besondere den Druck auf Ab_1 oder Bb (Figur 8) dessen Moment in Bezug auf A offenbar gleich ist dem des Gewichtes p. Oberfläche $a_1 P_1 m_1$, so kann man den Theil $P_1 a_1$ des hyperbolischen Schenkels als gerade annehmen, und man erhält zum Maaße dieses Momentes

$$\tfrac{1}{2}p \cdot \overline{m_1 P_1} \cdot \overline{m_1 a_1} (Am_1 + \tfrac{1}{3} m_1 P_1) = \tfrac{1}{6} p (AP_1 - a_1 b_1) Ab_1 (AP_1 + 2 a_1 b_1)$$
$$= \tfrac{1}{6} p (AP - ab_1) Ab_1 (AP + 2ab_1)$$

und da (§. **103**) der Druck auf Ab_1 oder Bb gleich ist $\tfrac{1}{2}p(\overline{AP}^2 - \overline{ab_1}^2)$, so erhält man für seinen Hebelarm oder für die Höhe seines Mittelpunktes U oder U_1 über AB

$$BU = AU_1 = \tfrac{1}{3} \frac{Ab_1 (AP + 2ab_1)}{AP + ab_1} = \tfrac{1}{3} Ab_1 \left(1 + \frac{ab_1}{AP + ab_1}\right)$$

welcher Ausdruck sich leicht konstruieren läßt. Denn verlängert man ab_1 um $b_1 c = ab_1$, und zieht au parallel zu cP bis zum Durchschnitt mit der Vertikale AH_1 in u, so hat man, wenn durch i der Durchschnitt derselben Vertikale mit cP bezeichnet wird

$$b_1 u = b_1 i = b_1 c \frac{Ai + b_1 i}{AP + b_1 c}\text{;}\quad Au = Ab_1 + b_1 u = Ab_1 \left(1 + \frac{ab_1}{AP + ab_1}\right)$$

und

$$AU_1 = \tfrac{1}{3} Au.$$

108. Da der Theil des Hyperbelschenkels $P_1 a H_1$ sehr nahe geradlinig wird, wenn GH sehr klein oder sehr groß in Bezug auf BH ist, und da ab für den Punkt H verschwindet, so folgt, daß der Hebelarm AU des Druckes, auf die ganze Höhe BH, dann beinahe gleich $\frac{1}{3}$ dieser Höhe sein wird, was à priori einleuchtet, da das auf die Vertikale AG_1 bezogene Moment des als geradlinig und erdig gedachten Dreiecks AH_1P_1 und das $= \frac{1}{6}p \cdot \overline{AP_1}^2 \cdot AH_1$ ist, gleich sein muß dem des fraglichen Druckes, d. i. $= \frac{1}{2}p\overline{AP}^2 \cdot AU$.

Ferner für die zwischenliegenden Fälle, wo es nicht gestattet ist, die Sehne P_1H_1 oder PH (Figur 7) statt der entsprechenden Bogenlänge zu nehmen, muß man auf die allgemeinere Methode §§. 127 2c. zurückgehen.

Für den besondern Fall $\theta = \alpha$ kann man jedoch diese Untersuchung vermeiden mittelst der Tafel der Werthe der Funktion $1 + U$, die §. 29 erwähnt ist, und die wir hier ganz hersetzen wollen.

Werthe von $\frac{GH}{GB}$	Werthe von $1+U$ für			Werthe von $\frac{GH}{GB}$	Werthe von $1+U$ für		
	$f=0,6$	$f=1,0$	$f=1,4$		$f=0,6$	$f=1,0$	$f=1,4$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	0,40	1,0620	1,0889	1,1020
0,05	1,0390	1,0420	1,0421	0,50	1,0489	1,0751	1,0886
0,10	1,0617	1,0685	1,0711	0,60	1,0360	1,0591	1,0720
0,15	1,0729	1,0852	1,0827	0,70	1,0250	1,0430	1,0536
0,20	1,0769	1,0943	1,1014	0,80	1,0152	1,0273	1,0351
0,25	1,0762	1,0980	1,1065	0,90	1,0071	1,0124	1,0171
0,30	1,0727	1,0966	1,1085	1,00	1,0000	1,0000	1,0000

109. Mit Hülfe dieser Tafel findet man durch Interpolieren oder durch Proportionaltheile den Hebelarm des Drucks für beliebige Werthe des Verhältnisses $GH:GB$ und von f mit einer hinreichenden Genauigkeit für die Anwendung; man braucht nur die durch sie erhaltene respektiven Werthe von $1+U$ mit $\frac{1}{3}BH$ zu multiplizieren. Man sieht, daß im allgemeinen der fragliche Hebelarm sich wenig (§. 17) von 0,35 dieser Höhe entfernt.

Hiernach würde es sehr leicht sein, geometrisch für den uns beschäftigenden Fall, die verschiedenen Aufgaben zu behandeln, die in der ersten Sektion analytisch behandelt sind.

Konstruktion der Dicken der Halbbekleidungen unter denselben Annahmen.

110. I. Für den Umsturz: Die angenäherten Formeln §§. 38 seqq. sind so einfach, daß wir bei ihrer Konstruktion hier nicht weiter verweilen, sondern sogleich zu dem allgemeinen Fall der Aufgabe übergehen.

Sei *ABCD* das Profil einer Halbbekleidung mit beliebiger äußerer Böschung *AD* und mit einer vertikalen Wand *BC*, deren Dicke *AB* für den Fall des Umsturzes um die Kante *A* gefunden werden soll; $O_1 GEF$ stellt die mittlere unbegrenzte Horizontale dar, welche die Höhe des Erdaufwurfs *IEF* bestimmt, dessen äußere Böschung *IE* die Verlängerung von *BC* im Punkte *H* trifft, der so wie *B* noch unbekannt ist.

Zieht man außerhalb der Figur, zur Vermeidung nahen Zusammentreffens mehrer Linien, die Vertikale $B_1 G_1$, um darauf horizontal die Punkte *B*, *C*, *A* und *G* nach B_1, C_1, H_1 und G_1 respektive zu projizieren, so wie alle diesen ähnlichen, welche *BG* angehören, und zieht man endlich durch den Punkt B_1, $B_1 M_1$ parallel zur natürlichen Böschung der Erde und rechtwinklig darauf $B_1 O_1$, die die obere Horizontale in M_1 und O_1 beziehungsweise treffen: so leuchtet nach dem Prinzip §. 101 ein, daß wenn *BC* die wirkliche Lage der innern Mauerwand wäre, man nur $O_1 P_1 = O_1 H_1$ von $O_1 B_1$ abzuziehen und das Quadrat von $B_1 P_1$ mit $\frac{1}{2}p$ zu multiplizieren brauchte, um den horizontalen Druck *P* auf $BH = B_1 H_1$ zu erhalten. Der Hebelarm dieses Druckes $BU = B_1 U_1$ ist ein Bruch von *BH*, den man in jedem Falle nach den Betrachtungen §. 107 ꝛc. bestimmen kann.

Nennt man *q* diesen Bruch, *δ* den Stabilitätskoeffizienten, so muß die Stärke *AB* oder *e* der Gleichgewichtsgleichung genügen

$$\tfrac{1}{2}p_1 e^2 H - \tfrac{1}{2}p_1 \overline{AD^1}^2 H + \tfrac{1}{2}p\, Cl.CH(e - \tfrac{1}{3}Cl) = \tfrac{1}{2}\delta pq.\overline{B_1 P_1}^2.B_1 H_1;$$

wo *p* und p_1 die Dichtigkeit der Erde und des Mauerwerks *H* die Mauerhöhe und $AD^1 = Dd$ die Basis ihrer äußern Böschung bezeichnen. Dividiert man alle Glieder durch $\frac{1}{2}p_1 H^2$, so nimmt sie die Form an

$$\frac{e^2}{H} - \frac{\overline{AD^1}^2}{3H} + \frac{p}{p_1}\frac{Cl.CH(e-\frac{1}{3}Cl)}{H^2} = \frac{\delta pq}{p_1}\frac{\overline{B_1 P_1}^2.B_1 H_1}{H^2}$$

unter der sie leicht konstruiert werden kann, indem alle ihre Glieder durch die 3ten und 4ten Proportionallinien zu gegebenen, oder als gegeben gedachten Linien sich darstellen laßen.

111. Hat man einen ersten Werth von e oder AB angenommen, der mehr oder weniger genau aber etwas zu groß ist, was mittelst des Prinzips §. 72 und der Tafel §. 34 oder der Formel §. 38 leicht geschehen kann, und nimmt ein für allemal auf der Vertikale des Punktes A, $Ah = 3H$ oder $= 3.Ad$ und errichtet die $D^1 m$ normal auf hD^1, so wird die Linie Am auf der Verlängerung von Ah, gleich sein dem unveränderlichen Verhältnis von $\overline{AD^1}^2 : 3H$.

Hat man ebenso ein für alle Mal die unbegrenzte Gerade IH^1, die die Höhe CH des Dreiecks CIH und aller ähnlichen im Verhältnis von $p : p_1$ reduziert, so bestimme man auf der Verlängerung von DC den Punkt i durch die Paralle $H^1 I$ zu BI; dann erhält man

$$Ci = \frac{CH^1 . CI}{BC} = \frac{p}{p_1} . \frac{CH . CI}{H};$$

ferner bestimme man auf der Verlängerung Ad einen neuen Punkt r, indem man durch den Punkt s, der auf $\frac{1}{3} CI$ von C ab liegt, die unbegrenzte rs normal auf Bi zieht; dies giebt wegen der ähnlichen Dreiecke drs und Bci

$$dr = \frac{Ci . ds}{BC} = \frac{p}{p_1} . \frac{CH . CI (e - \frac{1}{3} CI)}{H^2}.$$

Nimmt man endlich auf der Verlängerung von $M_1 B_1$ die unveränderliche Größe $B_1 V_1 = \frac{p_1}{\delta p q} H$ und bestimmt auf $B_1 M_1$ selbst den Punkt L_1 durch die Linie $P_1 L_1$ normal auf $P_1 V_1$, so hat man nur noch durch H_1 die Linie $H_1 R_1 = C_1 L_1$ zu ziehen und erhält auf $B_1 M_1$

$$B_1 R_1 = \frac{B_1 L_1 . B_1 H_1}{B_1 C_1} = \frac{\delta p q}{p_1} \frac{\overline{B_1 P_1}^2 . B_1 H_1}{H^2}$$

wonach man die Momentengleichung erhält

$$\frac{e^2}{H} - Am + dr = B_1 R_1.$$

112. In dem besondern Falle (§. 28), wo das Erdprisma ICH, das über der Mauer sich befindet, verschwindet, fällt I mit C und folglich H_1 mit C_1 zusammen; die Werthe von q, $B_1 P_1$ und $B_1 R_1$ laßen sich dann unmittelbar durch die vorigen Konstruktionen bestimmen, was auch die Lage von BHG sei; und da dr null wird, so braucht man nur die Länge $mn = B_1 R_1$ oder $B_1 L_1$ der Länge Am hinzuzufügen, um den Werth An von $\frac{e^2}{H}$ zu erhalten. Beschreibt man demnach über nd als Durchmeßer einen Halbkreis, so wird er auf die Horizontale AB die entsprechende Dicke der Bekleidung oder die Lage der Vertikale BG abschneiden.

Für den allgemeinen Fall kann dieser besondere Werth von e als eine untere Grenze (§. 35) der gesuchten Dicke betrachtet werden, während AB der Annahme nach als obere Grenze gewählt wurde. Nimmt man also an, daß man die geometrische Proportionallinie An zu Ad oder H und AB konstruiert habe, indem man nämlich die Linie Bn normal auf Bd errichtet, so hat man zu beweisen, daß die Bedingung

$$An - Am + dr = B_1 R_1$$

für den besonders gewählten Werth von AB erfüllt wird. Verlängert man hiezu An um die Größe $nq = dr$ und subtrahiert $qp = B_1 R_1$ von Aq, so muß der so erhaltene Punkt p mit m zusammenfallen, wenn nicht, so projiziere man horizontal die Differenz mp nach at auf dieser Verlängerung von GB, und betrachte sie als Ordinate einer Fehlerkurve txt_1, deren Abszissenaxe die Horizontale durch den Punkt m ist, und deren Durchschnitt x mit dieser Axe der wahren Lage von BG zukommen, oder die wahre Dicke mx der Erdbekleidung geben würde.

113. Wären (§. 11) CI und CH à priori gegeben um DI zu bestimmen, so würde man (§. 111) der Momentengleichung (§. 110) die Form geben

$$\frac{e}{H}\left(e + \frac{CI \cdot CH^1}{H}\right) - \frac{\overline{AD^1}^2}{3H} - \frac{\overline{CI}^2 \cdot CH^1}{3H^2} = \frac{\delta pq}{p_1} \cdot \frac{\overline{B_1 P_1}^2 \cdot B_1 H_1}{H^2}$$

Bemerkt man ferner, daß Ci und $B_1 R_1$ alsdann konstante Längen und à priori konstruierbar sind, wie auch die Vertikale BH liegen möge; projiziert man ferner den Punkt i vertikal noch i^1 auf

die Horizontale der Mauerbasis, nimmt AT als mittlere Proportionale zwischen AB oder e und Ai^1 oder $e+\frac{CH^1 . CI}{H}$ an und bezeichnet endlich durch n^1 den Punkt, wo die Vertikale des Punktes A von der Linie $n^1 T$, normal auf dT errichtet, getroffen wird, so erhält man einfach die Momentengleichung

$$An^1 - Am - \frac{\overline{CI}^2 . CH^1}{3H^2} = B_1 R_1 .$$

Sie giebt also An^1 aus lauter bekannten oder leicht zu konstruierenden Linien. Denn um die Entfernung Cr^1 auf BC zu erhalten, die das Glied in H vorstellt, hat man nur auf der Verlängerung von DC einen Punkt j mittelst der Linie Bj rechtwinklig auf BI, ferner auf BC den Punkt r' durch die Parallele jr' zur Geraden IH'', die von I nach dem Punkte H'', der auf $\frac{1}{3}CH'$ liegt, geht, zu bestimmen.

Um dann aus An^1 die gesuchte Dicke AB zu finden, muß man an den Punkt T, den Scheitel des leicht zu konstruierenden rechtwinkligen Dreiecks $n^1 Td$, einen Kreisbogen vom Halbmeßer $Tc = \frac{1}{2}Ci$ legen, der die Horizontale AT berührt, und der von Ac die Entfernung $B^1 c = cT$ abschneidet, woraus dann $AB^1 = AB$.

Es leuchtet ein, daß diese Konstruktionen gleichfalls zur Auflösung des allgemeinen Falls, wo DI oder dI ursprünglich gegeben wären, mittelst einer Fehlerkurve dienen könnten. Zuletzt kann man eben so einfache Konstruktionen auf die Aufgabe §. **9** über die Figur **2** anwenden; da aber dieser Fall keine Schwierigkeit hat, und nur für sehr kleine Erdaufwürfe gilt, so wollen wir dabei nicht weiter verweilen.

114. II. Für die Gleitung auf der Mauergrundfläche AB (Figur **10**). Nennt man δ_1 und f_1 die nach §§. **64** seqq. gewählten Stabilitäts- und Reibungskoeffizienten und behält die vorigen Bezeichnungen, sowohl für die Figuren als für die Daten bei, so hat man die Gleichung aufzulösen

$$\tfrac{1}{2}p_1 (AB + CD) H + \tfrac{1}{2}p CI . CH = \tfrac{1}{2}p \frac{\delta_1}{f_1} \overline{B_1 P_1}^2 .$$

Zieht man durch die Mitte K der äußern Böschung AD der Erdbekleidung die Vertikale $a'd$, die in a' und a die Horizontalen

durch die Basis und die Krone schneiden, so erhält man $a'B=\frac{1}{2}$ $(AB+CD)$ und die Gleichung wird, wenn man sie durch $p'H$ dividiert:

$$a'B+p\,\frac{CI\,.\,CH}{2p_1H}=\frac{\delta' p\,.\,\overline{B_1P_1}^2}{2f_1p_1H}.$$

Es wird einfacher sein, hier ein für alle Mal auf den Verlängerungen der Vertikale GC und der natürlichen Böschung der Erde M_1B_1 die Konstanten

$$CT=2\frac{p_1}{p}H;\ B_1V_1=2\frac{f_1p_1}{\delta_1 p}H$$

zu nehmen, indem man durch H die Linie Hu parallel zu IT zieht, die IC verlängert in u trifft, und im Punkte P_1 die Linie P_1L_1 rechtwinklig auf V_1P_1 errichtet, die ihrerseits B_1M_1 in L_1 trifft; dann hat man nur die Bedingung nachzuweisen

$$a'B+Cu \text{ oder } au=B_1L_1$$

für jeden Werth von AB, für die man immer mehr oder weniger genäherte Werthe hat.

115. Nimmt man namentlich an, daß der Fußpunkt I der äußeren Böschung des Erdaufwurfs mit C zusammenfällt, so wird $Cu=0$ und die mittlere Dicke aC oder $a'B$ der Erdbekleidung wird ganz bestimmt sein und so eine untere Grenze der gesuchten Dicke geben.

116. Um die Auflösung für den allgemeinen Fall zu vollenden, muß man die positive oder negative Differenz der Linien au und B_1L_1 als Ordinate Bz einer Fehlerkurve $zz'z''$ nehmen, deren Axe die Linie AB ist und deren Durchschnitt x mit eben dieser Axe die wahre Länge der innern Mauerwand giebt.

Die Auflösung würde offenbar dieselbe bleiben, wenn man in der Annahme §. 113 DI als veränderlich ansähe, wenn nicht die Konstruktionen rücksichtlich der Vertikale BH an einer beliebigen Lage dieser, so wie des als gegeben betrachteten Dreiecks ICH vorgenommen werden müßten; denn zieht man Cu von B_1L_1 ab, die dann beide bekannt sind, so erhielte man daraus ebenfalls die mittlere Dicke aC oder a_1B.

Die Konstruktion dieser Dicke für den Fall Figur 2 ist sehr leicht.

117. Allgemeine Bemerkungen. Nach dem Resultate (§. 66) der im 2ten Kapitel des 1sten Abschnittes aufgestellten Diskussionen hat man sich vorzüglich mit der Annahme des Umsturzes zu beschäftigen, wenn die Erdaufwürfe wenig die 3 malige Mauerhöhe übertreffen und mit der Annahme der Gleitung für noch stärkere Erdaufwürfe, die wir hier vorzüglich im Auge haben. Man wird deshalb gut thun, wenn man erst die Dicke in dieser letzten Annahme berechnet und sie dann nach §§. 111 und 112 verbeßert, wenn diese Dicke in der That größer wird, als die Annahme des Umsturzes sie liefert.

Anderseits darf man nicht vergessen, namentlich in den allgemeinen Fällen, wo man zu den Fehlerkurven seine Zuflucht nehmen und die Konstruktionslinien also vervielfältigen muß, daß der meiste Theil dieser, in der Figur punktierten, Linien nur darum ausgezogen ist, um dadurch die Auflösungen verständlicher zu machen; bedient man sich aber des Lineals, und Winkelmaaßes um die angezeigten Parallelen oder Normalen zu ziehen, so genügt es, die Durchschnite, welche sie bestimmen, zu numerieren, ohne sie zu konstruieren.

Ueberdies ist es kaum zu sagen nöthig, daß, wenn man in einer ersten Annahme über die Lage der innern Seitenwand der Erdbekleidung eine zu schwache Dicke erhält, man durch eine neue Annahme einen entgegengesetzten Fehler zu erhalten suchen muß, so daß man durch die geradlinige Verbindung der entsprechenden Punkte der Fehlerkurve, einen sehr genäherten Werth der Dicke aus dem Durchschnitt der Kurve mit der Axe erhält, ohne die Ordinatenzahl zu vermehren.

Da diese Bemerkungen für alle Auflösungen dieses zweiten Abschnittes gelten, so wollen wir nicht wieder darauf zurückkommen.

Erweiterung der vorigen Konstruktionen auf Erdbekleidungen und Erdaufwürfe mit beliebiger Böschung.

118. Im vorigen ist die äußere Böschung des Erdaufwurfs parallel der natürlichen Böschung der Erde angenommen; es kommt aber oft vor, daß man durch künstliche Mittel, wie z. B. durch

Rasenbekleidung, Faschinen u. s. w. dieselbe weit steiler macht, und dann wächst der Druck um so mehr, je höher der Erdaufwurf ist.

Der Ausdruck für P (§. 4) für diesen allgemeinen Fall unterscheidet sich von seinem analogen (101) für den gegenwärtigen Fall nur dadurch, daß h_1^2 dort mit $f tg\,\theta = \text{cotg}\,\alpha\, tg\,\theta$ multiplizirt ist, was für $\theta = \alpha$ der Einheit gleich wird; es genügt also, dort statt h_1 die Größe $\sqrt{h_1 \text{cotg}\,\alpha . h_1 tg\,\theta}$ zu setzen. Ist daher IE (Figur 11), die Böschung des neuen Erdaufwurfs, steiler als die natürliche Böschung der Erde, so hat man in den Konstruktionen §§. 101 seqq. die Entfernung $GH = h_1$ der obern Horizontale FEO vom Durchschnitt IE mit der Vertikale BG, durch die mittlere Proportionale Gh zwischen $GE = GH tg\,\theta$ und der Linie $GR = GH . \text{cotg}\,\alpha$, auf OF (durch die Normale gegen die natürliche Böschung der Erde BM oder durch die, durch den Punkt H gehenden Parallele zu BO bestimmt) zu ersetzen.

Um also auf den jetzigen Fall alles früher gesagte anwenden zu können, hat man nur bei den Konstruktionen rücksichtlich des Drucks statt des Punktes H den unveränderlichen Punkt h zu setzen; d. h. z. B. (§. 103) es ist die Entfernung oh statt oH von ob abzuschneiden, um ba zu erhalten, dessen Quadrat in dem Ausdruck für den Druck auf bH als Faktor vorkommt.

Ebenso wird man finden, daß zur Anwendung der ersten §. 102 angezeigten Konstruktion der Bruchlinien BX des Druckprismas, der Punkt E durch den Punkt T' zu ersetzen ist, der dadurch gefunden wird, daß man ein für alle Mal, auf EF die Linie GT' überträgt, d. i. die mittlere Proportionallinie zwischen den Entfernungen GE und GQ, welche letztere durch die Parallele HQ zur natürlichen Böschung BM oder durch die Normale auf HR bestimmt ist, d. h. man nehme auf BM, $BT = BT'$, so wird die Linie TX, normal auf BT, die Linie EF im gesuchten Punkte X schneiden.

119. In Folge dieser Uebereinstimmung zwischen dem jetzigen und dem frühern Fall (§§. 101 seqq.) kann man keine Schwierigkeit bei der Auflösung der verschiedenen Fälle finden; denn auch hier noch wird die Aufeinanderfolge der Punkte a (Figur 11) den Schenkel einer gleichseitigen Hyperbel bilden, die durch den Punkt h geht und zur Asymptote die Gerade GY hat, die man dadurch erhält, daß man bei der Konstruktion dieser Punkte a ꝛc. h durch G

ersetzt. So wird man auch ohne Schwierigkeit den Werth des Drucks auf einen beliebigen Theil *BH*, das Moment dieses Drucks und seinen Hebelarm (§. **107**) finden.

Hier wird nur dieser Werth nicht verschwinden für das in *H* sich befindende Element, da das Erdprisma *EHQ*, das durch die Linie *HQ* parallel zu *BM* begrenzt wird, und dem die Ordinate *Hn* der Kurve angehört, selbst einen endlichen Werth beibehält, so lange *HE* von *HQ* verschieden ist: dieser Druck auf *H* ist immer gegeben durch das Produkt $\frac{1}{2}p.\overline{Hn}^2$ und sein Moment $\frac{1}{2}p.\overline{Hn}^2.BH$ in Bezug auf *B* oder *A* muß demjenigen hinzugefügt werden, das die Methode §. **107** für den Druck auf *BH* giebt.

120. Nimmt man für den Augenblick die Ordinaten der Hyperbel *Pah* (Figur **11**) §. **106** so gedreht an, daß sie rechtwinklig auf der Abszissenaxe *BH* stehen, so läßt sich leicht erachten, daß $\frac{1}{2}\overline{Hn}^2.HB$ nichts anders ist, als das Moment des Rechtecks $BHnn^{I}$ in Bezug auf *BG*, und da anderseits das Moment des Drucks vom Dreieck *HEQ* die ganze Höhe *BH*, abgesehen vom endlichen Drucke auf *H*, gleich ist (§. **106**) dem Momente des, in n^{1} rechtwinkligen, gemischtlinigen Dreiecks Pnn^{1}, so folgt, daß das ganze Moment seinerseits mit dem der Trapezfläche *BPnH* in Bezug auf *BG* zusammenfalle, dessen Ordinaten als gedreht angenommen werden. Dies ist die geometrische Bedeutung des §. **3** gegebenen Ausdrucks für das Moment bei der allgemeinen Voraussetzung, die jetzt uns beschäftigt.

Durch die bekannten Methoden kann man also sehr leicht den genäherten Ausdruck dieses Moments erhalten, wenn man den Hyperbelbogen *Pan* als geradlinig ansieht, was fast immer bei der gegenwärtigen Aufgabe erlaubt ist. Es wird jedoch gleichmäßiger und einfacher sein, wenn man direkt den Mittelpunkt *U* des Gesammtdrucks $\frac{1}{2}p.\overline{BP}^2$ auf *BH* durch das vorige Verfahren aufsucht.

121. Nach dem vorigen und dem schon §. **107** gesagten, wird dieser Mittelpunkt offenbar gegeben durch die Formel:

$$BU = \frac{\frac{1}{2}p(BP-Hn)BH\{Hn+\frac{1}{3}(BP-Hn)\}+\frac{1}{2}p.\overline{Hn}^2.BH}{\frac{1}{2}p\overline{BP}^2}$$

oder:

$$BU = \frac{1}{3}\left\{BH + BH.\frac{Hn(BP+Hn)}{\overline{BP}^2}\right\}.$$

Um das Zusammenfallen von Linien zu vermeiden, projiziere man die Punkte H, G und B nach H_1, G_1 und B_1 auf eine beliebige Vertikale; nimmt man dann auf der horizontalen Projektionslinie HH_1 die Entfernung $H_1P_1 = BP$, und verlängert sie nach beiden Seiten um $H_1N = P_1S = Hn$ und erreichet auf B_1P_1 die Normale P_1J, so erhält man dadurch auf H_1G_1:

$$H_1J = \frac{\overline{H_1P_1}^2}{B_1H_1} = \frac{\overline{BP}^2}{BH}.$$

Fällt man endlich von S auf NJ die Normale SX_1, so wird sie H_1G_1 im Punkte X_1 treffen, so daß man wegen Aehnlichkeit der Dreiecke NH_1J und X_1H_1S erhält:

$$H_1X_1 = \frac{H_1N \cdot H_1S}{H_1J} = \frac{BH \cdot Hn(BP + Hn)}{\overline{BP}^2},\ BU = \tfrac{1}{3}B_1X_1.$$

122. Der allgemeine Angriffspunkt U des Drucks ist also für jede Lage der Vertikale der innern Mauerwand bekannt und die Bestimmung der Stärke der Mauer geschieht ganz nach §§. 110 seqq. Es ist also die Auflösung in beiden Fällen gleich zusammengesetzt; wir werden aber bald (§. 136) sehen, daß sie nicht mehr anwendbar ist, wenn $\theta < \alpha$ d. h. wenn die äußere Böschung EI des Erdaufwurfs kleiner ist, ats die der natürlichen Böschung der Erde, was in der Regel nicht der Fall ist.

Es leuchtet ferner ein, daß die, zur Bestimmung des Angriffspunktes des Drucks auf die ganze Höhe BH, angewandten Betrachtungen gleich anwendbar sind auf den Fall, wo der Druck nur auf einen Theil dieser Höhe von H ab gerechnet, ausgeübt wird. Was das Moment und den Angriffspunkt des Druckes auf die untern oder zwischenliegenden Theile anbetrifft, so bestimmen sie sich einfach nach der Methode §. 107, da der endliche in H wirksame Druck dann nicht mehr betrachtet zu werden braucht.

123. Wir wollen jetzt den Fall betrachten, wo die innere Mauwand BC (Figur 12) mit der Vertikale BG_1 einen beliebigen Winkel $CBG^1 = \varepsilon$ bildet, dieser soll positiv sein für die Figuren 12 und 13 und negativ für Figur 14, wo BC nach der entgegengesetzten Seite geneigt ist. Dies vorausgesetzt, wollen wir, wie §§. 1 seqq., deren Bezeichnungen zum Theil beibehalten werden sollen,

den analytischen Ausdruck des Drucks F bestimmen, der durch die Erde rechtwinklig auf einen beliebigen Theil bH der innern Mauerwand ausgeübt wird. Dabei denke man sich diese Wand bis zur äußern Böschung IE des Erdaufwurfs, d. i. bis H verlängert.

Seien h^1 und z die Höhen HL und bg der Punkte H und b unter der obern mittlern Horizontale OEF des Erdaufwurfs; θ, α und v die Winkel, welche beziehungsweise die äußere Böschung HE dieses Erdaufwurfs, die natürliche Böschung der Erde bm und die Böschung bX des Prismas $bHEX$, das den Druck F auf bH ausübt, mit der Vertikale machen, so hat man hier (§. 2) um allgemein F als Funktion des Gewichts

$$Q=p\left\{\tfrac{1}{2}z^2(tg v+tg\varepsilon)-\tfrac{1}{2}h_1{}^2(tg\theta+tg\varepsilon)\right\}$$

dieses Prismas zu finden, in der Annahme Figur 12

$$F=\tfrac{1}{2}pz^2\,\frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha-\varepsilon)}\,\frac{(k-\omega)(\omega+q)}{1+n\omega}$$

und wenn man zur Abkürzung

$$tg\varepsilon-\frac{h_1{}^2}{z^2}(tg\varepsilon+tg\theta)=q,\ tg v=\omega,\ tg\alpha=k,\ tg\,(\alpha-\varepsilon)=n$$

setzt, so erhält man für die Bedingung des Max. von F, indem man genau, wie in §. 2 verfährt.

$$tg v=-\frac{1}{tg(\alpha-\varepsilon)}-\frac{1}{z\cos\alpha}\sqrt{\frac{\cos^2\alpha z^2}{\sin^2(\alpha-\varepsilon)}+\frac{\sin(\theta+\varepsilon)\cos\alpha h_1{}^2}{\cos\theta\sin(\alpha-\varepsilon)}}$$

$$P=\tfrac{1}{2}p\cos\varepsilon\left\{\frac{r}{\sin(\alpha-\varepsilon)}\sqrt{\frac{\cos^2\alpha z^2}{\cos^2\varepsilon.\sin^2(\alpha-\varepsilon)}+\frac{\sin(\theta+\varepsilon)\cos\alpha h_1{}^2}{\cos^2\varepsilon\cos\theta\sin(\alpha-\varepsilon)}}\right\}^2,$$

welche Formeln für $\varepsilon=o$ mit denen §. 4 oder §. 118 zusammfallen.

124. Um den Werth von P zu konstruieren, errichte man im Punkte b die Normale bo^1 auf die natürliche Böschung bm der Erde, man nehme die Winkel $obG=o^1bg=90^0-\alpha$, wodurch der Winkel $obo^1=\varepsilon$ wird. In dem Dreieck obo^1, das durch den Durchschnitt von bo und bo^1 mit der mittlern Horizontale des Erdaufwurfs gebildet wird, ist der Winkel $oo^1b=180^0-\alpha$, der Winkel $obo^1=\varepsilon$ und der Winkel $boo^1=\alpha-\varepsilon$, also die Seite:

$$bo=\frac{bg}{\cos obg}=\frac{z}{\sin(\alpha-\varepsilon)}.$$

Man hat ebenso in dem Dreieck obG

$$obG = o^1bg = 90^0 - \alpha,\quad boG = \alpha - \varepsilon,\quad bG = \frac{bg}{\cos Gbg} = \frac{z}{\cos\varepsilon}$$

und wegen der Proportionalität zwischen den sinus und den gegenüberliegenden Seiten

$$oG = bG\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha - \varepsilon)} = \frac{z\cos\alpha}{\cos\varepsilon\sin(\alpha - \varepsilon)}.$$

Um endlich das zweite Glied unter dem Wurzelzeichen zu konstruieren, bemerke man, daß in GHE die Höhe $HL = h_1$ ist, also

$$GH = \frac{h_1}{\cos\varepsilon} \text{ und } GE = GH\frac{\sin H}{\sin E} = \frac{h_1\sin(\theta + \varepsilon)}{\operatorname{coc}\varepsilon\operatorname{sos}\theta};$$

legt man ferner durch H die Parallele HR zu bo, die in R die Verlängerung der Basis EG trifft, so hat man in dem Dreieck RHG, wegen des obigen Werthes von GH und da der Winkel $HRG = \alpha - \varepsilon$ der Winkel $RHG = 90^0 - \alpha$ ist:

$$RG = \frac{h_1\cos\alpha}{\cos\varepsilon\sin(\alpha - \varepsilon)};\text{ woraus } GE.GR = \frac{\sin(\theta + \varepsilon)\cos\alpha h_1{}^2}{\cos^2\varepsilon\cos\theta.\sin(\alpha - \varepsilon)}.$$

Wenn man folglich in G die Vertikale Gh zieht, die die mittlere Proportionale zwischen GE und GR ist, so wird endlich wegen $\overline{oG}^2 + \overline{Gh}^2 = \overline{oh}^2$

$$P = \tfrac{1}{2}p\cos\varepsilon(ob - oh)^2.$$

Diese Konstruktion ist offenbar identisch mit denen §§. 101 und 118 bis auf dem Faktor $\cos\varepsilon$, und daß der Punkt h an die Stelle der Punkte H (Figur 6) und h (Figur 11) getreten ist; denn trägt man oh von o nach a auf ob ab, so hat man:

$$P = \tfrac{1}{2}p\cos\varepsilon\,\overline{ba}^2,$$

und wo auch der Punkt b auf BH liegen möge, bo bleibt sich selbst oder einer festen Gerade BO parallel und folglich bleiben auch die Gerade HR und der sich daraus ergebende Punkt h unveränderlich.

Diese Konstruktionen besitzen noch die Eigenthümlichkeit, daß darin nichts zu ändern ist, wenn der Winkel ε negativ wird, oder

wenn BG (Figur 14) nach der andern Seite hinliegt, außer daß der Winkel obm dann gleich $90^o - \varepsilon$ anstatt $90^o + \varepsilon$ ist.

125. Konstruiert man jetzt die auf einander folgenden Punkte a, die verschiedenen Punkten b von BH zugehören, so erhält man eine Kurve, die durch den Punkt h geht und die auch hier noch ein Schenkel einer gleichseitigen Hyperbel ist (§§. **105** und **120**), deren Mittelpunkt in G liegt und deren Asymptote die Gerade GY ist, die man durch dieselbe Zeichnung erhält, indem man anstatt h den Durchschnitt G, der innern Maueranlage mit der mittlern Horizontale OF des Erdaufwurfs annimmt; diese Gerade ist dieselbe, mit der die Hyperbel zusammenfällt, sobald die Ausfüllung die Form BGF hat. Um in'sbesondere den Punkt y zu bestimmen, wo diese Gerade bo trifft, hat man: $oy = oG$.

126. Nach dem gesagten wird es nun leicht sein, die Anwendung der §§. **105** seqq. und namentlich der §§. **119** und **120** in Bezug auf die annähernde Bestimmung der Momente und Hebelarme des Drucks, auf den gegenwärtigen Fall zu machen. Beide müßen nur nicht mehr in Bezug auf den Punkt B, sondern in Bezug auf die Projektion A^1 der Rotationskante A auf die innere Mauerwand BC genommen werden, so daß z. B. der Hebelarm des elementaren in b rechtwinklig auf diese Flächen ausgeübten Druckes gleich wird A^1b und nicht mehr Bb.

Da ferner der Ausdruck für diese Pressungen mit dem cosinus des Winkels ε, den die Abszissenaxe BG mit den Vertikalen macht, multipliziert ist, so kann man die verschiedenen Punkte dieser Axe oder die Hebelarme A^1b durch ihre Projektionen auf eine beliebige Vertikale, so wie die Kurve Pah durch einen andern Hyperbelschenkel, der durch die neuen Abszissen und horizontalen Ordinaten ba konstruiert ist, ersetzen. Wird diese Hyperbel als den Pressungen $\frac{1}{2}p\overline{ba}^2$, $\frac{1}{2}p.\overline{BP}^2$ u. s. w. rechtwinklig auf die neue Axe angehörend betrachtet, so wird sie dieselben Momente hervorbringen, wie die erstere, wenn man auf sie die Betrachtungen §§. **106** und **120** anwendet und zugleich zuläßt, daß die Horizontalprojektion von A^1 der Mittelpunkt dieser Momente wird, wodurch das des Theils BA^1 negativ wird. *)

---

*) Das folgende Kapitel wird das Beispiel von Aufgaben liefern, wo die elementaren auf die ganze Mauerwand wirkenden Kräfte zwar parallel, aber

Wir wollen aber hiebei nicht verweilen, da man auf eine rein geometrische Interpretation verwickelter Resultate gelangt, die man durch die Integration des für den Elementardruck erhaltenen analytischen Ausdrucks bekommt. Es scheint uns zweckmäßiger, nachzuweisen, wie man direkt die Aufsuchung des mittlern Hebelarms dieses Druckes auf ein einfaches Problem der Quadratur zurückführen kann.

127. Verschiebt man die Gerade BG der innern Böschung (Figur 12) und alle darauf bezüglichen Konstruktionen horizontal und mit sich parallel bis B_1G_1, so daß dieselben unten akzentuierten Buchstaben die respektiven Projektionen der der ersten Geraden angehörigen Punkte bezeichnen, so vermeidet man das Zusammentreffen der Linien und die Nothwendigkeit, alle Operationen, für jede, der gedrückten Wand BH beigelegten, Lagen, zu wiederholen.

Dies vorausgesetzt, betrachte man im besondern den Punkt b_1, die Projektion von b, so wie die Ordinate $b_1a_1 =$ der entsprechenden ba, die hier direkt durch das Verfahren §. 124 bestimmt wird, wenn man dasselbe auf B_1G_1 und auf die Horizontale $o_1G_1E_1$, die an die Stelle von oGE getreten ist, anwendet, und errichte im Punkte b_1 die Linie b_1v_1 normal auf b_1a_1 und mache sie gleich

---

beliebig gegen diese Mauerwand geneigt sind; die Hebelarme werden dann Normalen sein, die man aus dem Rotationsmittelpunkte A auf ihre gemeinschaftliche Richtung herabläßt. Um diese Verwickelung zu vermeiden, und die Methode doch allgemein zu machen, nenne man y eine beliebige Ordinate ba (Figur 12) der Kurve Pan, so ist der Angriffspunkt U der Resultante aus den elementaren Kräften $d(\frac{1}{2}p\cos\varepsilon . \overline{ba}^2) = p\cos\varepsilon\, y\,dy$ derselbe, wie der der Kräfte $y\,dy$ oder der einer Gesammtkraft $\frac{1}{2}y^2$, die rechtwinklig auf die Richtung von BH wirken; so daß also, wenn die Ordinaten des betrachteten Theils der Kurve Pan rechtwinklig auf diese Gerade gedreht werden, die Aufsuchung des Angriffpunktes U oder seine Entfernung von einem beliebigen Punkte B, der als Momentenmittelpunkt angenommen wird, auf das §§. 107 und 121 gesagte zurückgeführt ist, wonach man das auf die Axe BH bezogene Moment der Fläche zu bestimmen hat, welche einentheils von dem erwähnten Theile der Kurven und der Perpendikuläre der Hebelarme für den Angriffspunkt B, anderseits von den aus den Enden dieses Theils zu BH gezogenen Parallelen begrenzt wird, und wonach man dann das so erhaltene Moment durch den entsprechenden Druck zu dividieren hat; d. h. durch die Hälfte der Differenz zwischen den Quadraten der Ordinaten y oder ba, welche den Enden des gedrückten Theils zukommen. In allen Fällen wird diese Untersuchung sehr durch die folgenden Betrachtungen abgekürzt.

der konstanten Länge $\frac{2p_1}{p\cos\varepsilon}$, was leicht mittelst des angenommenen Maaßstabes oder mittelst Proportionallinien geschehen kann; errichtet man dann in a_1 die Linie $a_1 l_1$ normal auf $a_1 v_1$ so giebt sie auf der Verlängerung von $v_1 b_1$ ein Länge

$$b_1 l_1 = \tfrac{1}{2}\frac{p}{p_1}\cos\varepsilon.\overline{ba}^2,$$

die folglich den Druck auf bH, ausgedrückt in Kubikmetern des Mauerwerks, darstellt. Trägt man endlich $b_1 l_1$ von b_1 nach $a_1{}^1$ auf der in b_1 rechtwinklig auf $B_1 G_1$ errichteten Ordinate oder Normale ab, so wird der Endpunkt $a_1{}^1$ und alle ähnlichen eine neue Kurve $P_1 a_1{}^1 n_1$ bilden, die zweckmäßig statt der Pan oder selbst statt der $P_1 a_1 H_1$ (Figur 8 §. 106) bei der Auflösung der gegenwärtigen Aufgaben angenommen werden kann.

128. Will man z. B. den Druck auf eine beliebige Ausdehnung $bC = b_1 C_1$ bestimmen, so hat man nur die Differenz $d_1{}^1 a_1{}^1$ der Ordinaten $b_1 a_1{}^1$ und $C_1 C_1{}^1$ zu nehmen, die nach dem Maaßstabe der Zeichnung das Volumen Mauerwerk angiebt, das diesem Druck gleich ist. Will man ferner das Moment in Bezug auf den Punkt A oder in Bezug auf die Projektion A^1, die durch A_1 dargestellt wird, finden, so fälle man auf die Richtung der Ordinate $A_1 Q_1$ für diesen letzten Punkt, die Normalen $a^1 m_1$ und $C_1{}^1 q_1$, die zwischen dieser Ordinate und der Kurve das gemischtlinige Trapez $m_1 a_1{}^1 C_1{}^1 q_1$ einschließen, dessen Fläche, zufolge ähnlicher Betrachtungen, wie §. 105, nach dem Maaßstabe der Zeichnung diejenige Zahl angiebt, welche den Werth des verlangten Moments ausdrückt.

Ebenso wird die Größe des Drucks auf $A_1 H = A_1 H_1$ in Kubikmetern des Mauerwerks durch die Länge der Ordinate $A_1 Q_1$ bestimmt, die man aus der Projektion $r_1 Q_1$ des Kurvenschenkels $n_1 a^1{}_1 Q_1$ und von $A_1 r_1 = H_1 n_1$, welches (§§. 119 und 120) den auf H ausgeübten endlichen Druck angiebt, erhält, während sein Moment durch die Fläche $A_1 Q_1 a_1{}^1 n_1 H_1$ gegeben ist.

Endlich wird der Druck auf die ganze Höhe BH oder $B_1 H_1$ dargestellt sein durch die Länge $B_1 P_1$, welche dem B_1 entspricht, und sein Moment durch die vorige Fläche, vermindert um die des gemischtlinigen Dreiecks $Q_1 P_1 Q_1{}^1$, welche das angegebene Moment

auf BA^1 ausdrückt, und das zwischen dem Bogen $Q_1 P_1$, der Verlängerung von $A_1 Q_1$ und der von P_1 auf diese Verlängerung gefällten Normale liegt. Mit andern Worten ist also das Moment des Drucks auf BH gleich der ganzen Fläche $B_1 P_1 a_1{}^1 n_1 H_1$, vermindert um das Rechteck $B_1 P_1 Q_1{}^1 A_1$.

129. Die Entwickelung dieser gemischtlinigen Flächen kann mit beliebigem Grade der Annäherung, den die Größe des Maaßstabes der Zeichnung mit sich bringt, durch gewöhnliche Annäherungsmethoden oder durch das Princip der parabolischen Quadraturen nach Simpson geschehen, dessen Formel wir pag. **164** des **Mémorial Nro. 12** graphisch dargestellt haben.

Man wird den vorigen Resultaten einen noch klareren geometrischen Ausdruck geben und die Anwendungen sehr erleichtern, wenn man den Druck durch eine beliebige Linie z. B. durch die Höhe $H = DD^1 = CC^1$ der Erdbekleidung getheilt denkt und folglich in den obigen Konstruktionen die Konstante $b^1 v_1 = \frac{2p_1}{p} \frac{H}{\cos\varepsilon}$ nimmt, welche Länge man durch eine vierte Proportionallinie zu p, $2p_1$ und $\frac{H}{\cos\varepsilon} = BC$ erhält, die man in gewissen Fällen behufs der Genauigkeit und Leichtigkeit der Konstruktionen, auf die Hälfte, auf ein Drittheil u. s. w. reduzieren kann, unter Vorbehalt, daß man ebenso dann die Endresultate für die Größe des Drucks und des Momentes wieder vergrößern muß. Man wird aber bald sehen, daß man den konstanten fraglichen Parameter nach der Natur der zu lösenden Aufgabe modifizieren kann.

Um den allgemeinen Fall für Erdbekleidungen mit geneigter innerer Seitenwand zu vervollständigen, müßen wir einiges über die Art und Weise hinzufügen, wie man ihre Dicke sowohl für den Fall des Gleitens als auch für den des Umsturzes finden kann.

Bestimmung der Stärke der Halbbekleidungen für diese allgemeinen Annahmen.

130. I. Für den Umsturz um die äußere Kante der Mauerbasis A Figur **13** und **14**, wo dieselben Buchstaben dieselben Gegenstände wie in Figur **9** und **12** (§§. **110**, **124** seqq.) darstellen.

Man projiziere vertikal nach s den Schwerpunkt des Erddreiecks

ICH auf die Horizontale DC der Mauerkrone, wodurch ds der Hebelarm dieses Dreiecks wird. Man ziehe dann die Gerade IH^1, deren schiefwinklige Ordinate CH_1 auf CG gemeßen, zu der entsprechenden CH des Punktes H von IE im Verhältnis von $p:p_1$ steht, und projiziere endlich die Scheitel C und D nach C^1 und D^1 auf die Richtung der Horizontale für die Basis AB und den Punkt H^1 nach K^1 auf die Vertikale von C. Dies vorausgesetzt, dividiere man durch $\frac{1}{2}H^2$ alle Glieder der Gleichung:

$$\text{Mom.}\,AC^1Cd - \text{Mom.}\,ADd \pm \text{Mom.}\,BCC^1 + ICH^1.ds = \frac{\delta M}{p_1},$$

die sich auf den gegenwärtigen Fall bezieht, und in der das obere Zeichen für Figur 13, das untere für Figur 14 gilt; dies giebt:

$$\frac{\overline{AC^1}^2}{H} - \frac{\overline{AD^1}^2}{3H} \pm \frac{BC^1(AC^1 \pm \frac{1}{3}BC^1)}{H} + \frac{CK^1.IC.ds}{H^2} = \frac{2\delta}{p_1}.\frac{M}{H^2}$$

oder:

$$\frac{AC^1.AB}{H} - \frac{\overline{AD^1}^2}{3H} + \frac{\overline{BC^1}^2}{3H} + \frac{CK^1.IC.ds}{H^2} = \frac{2\delta M}{p_1 H^2}$$

in welcher Form sie ohne Zweideutigkeit auf beide Fälle Figur 13 und Figur 14 anwendbar bleibt.

Sei AT die mittlere Proportionallinie zwischen AB uud AC^1, die als erdichtete Stärke der Erdbekleidung angesehen werden kann, und durch deren Kenntnis man auch die Linien AB und AC^1 erhält, wie wir §§. 110 seqq. gesehen haben, weil überdies BC^1 hier bekannt ist; man braucht dann auf die verschiedenen Glieder dieser Gleichung nur die analogen Konstruktionen derselben §§. anzuwenden, um sie auf die lineäre Form zu bringen, in der man aus ihr, in einigen Fällen (§. 111) direkt, in anderen durch Zeichnung einer Fehlerkurve, die Länge AT und folglich die verlangte Dicke AB erhält.

So z. B. erhält man den lineären Werth des letzten Gliedes vom ersten Satze (§. 110), indem man auf der Verlängerung von DC den Punkt i vermittelst der Parallele K^1i zu C^1I, und dann auf der Verlängerung der Vertikale Ad den Punkt r vermittelst einer von s auf C^1i herabgefällten Normale bestimmt, wodurch man den gesuchten Werth erhält.

Die vollständige Analogie der Konstruktion der andern Glieder mit denen der dort behandelten Gleichungen, verbunden mit den §§. 127 seqq. über die Art und Weise, die Werthe von M oder deren Faktoren zu bestimmen, überhebt uns jeder neuen Erläuterung.

131. II. Für den Fall der Gleitung. Man zerlege den Druck P oder $\frac{1}{2} p \cos\varepsilon \overline{BP}^2$ (§. 124 Figur 12) auf BH in zwei Kräfte, die eine horizontal, $P\cos\varepsilon$, die das Gleiten hervorbringt, die andere vertikal, $P\sin\varepsilon$, die zu dem Gewichte der Mauer hinzukommt oder davon abgezogen werden muß, je nachdem die innere Seitenwand BC nach außen (Figur 13) oder nach innen (Figur 14) geneigt ist. Man hat dann die Gleichgewichtsgleichung:

$$\tfrac{1}{2} p_1 (AB+CD) H + \tfrac{1}{2} p_1 \, CI.CK^1 \pm P\sin\varepsilon = \frac{\delta_1}{f_1} P.\cos\varepsilon,$$

je nachdem Figur 13 oder Figur 14 gilt.

Dividiert man sie durch $p_1 H$, so läßt sie sich ganz nach den Verfahrungsarten §. 114 behandeln, außer daß, nachdem §. 128 die linearen Werthe von $\frac{\delta_1 P}{p_1 f_1 H}$ und $\frac{P}{p_1 H}$ besonders konstruiert sind, man sie dann auf einer beliebigen Normale zur Seite BC, wodurch die natürliche Richtung des Druckes angezeigt wird, abtragen, und endlich die Horizontalprojektion des ersten und die Vertikalprojektion des zweiten Werthes der entsprechenden Glieder der Gleichung nehmen muß u. s. w.

132. Für die Auflösungen der Fälle, wo IC null oder à priori gegeben ist, leuchtet ein (§§. 114 und 115), daß die vorigen Konstruktionen unmittelbare Anwendung auf den ersten von ihnen finden, und daß man für den zweiten, da ds unbekannt ist, die zweite der Gleichungen §. 130 für das Moment durch folgende ersetzen muß:

$$\frac{AC^1.AB}{H} - \frac{\overline{AD}^{1\,2}}{3H} + \frac{\overline{BC}^{1\,2}}{3H} + \frac{CK^1.IC(dC-Cs)}{H^2} = \frac{2\delta.M}{p_1.H^2},$$

wo $dC = AC^1$ und Cs, CK^1 mittelst des Dreiecks ICH oder mittelst IC zu bestimmen sind.

Projiziert man i nach i^1 auf die Richtung von AB, so erhält man also endlich die Gleichung aufzulösen:

$$\frac{AC^1}{H}\left(AB+\frac{CK^1.CI}{H}\right)+\frac{\overline{BC^1}^2-\overline{AD^1}^2}{3H}-\frac{CK^1.CI.Cs}{H^2}$$

$$=\frac{AC^1.Ai^1}{H}-\frac{\overline{BC^1}^2-\overline{AD^1}^2}{H}-\frac{CK^1.CI.Cs}{H^2}=\frac{2\delta M}{p^1 H^2},$$

was keine Schwierigkeit (§. 113) hat, mag man konstruieren oder rechnen, indem man die Längen nach dem Maaßstabe reduziert.

133. Aus den von Français *) angestellten Rechnungen ergiebt sich, daß für geringe Erdaufwürfe das Profil *ABCD* Figur 14 vortheilhafter und ökonomischer ist, als das Figur 13, sowohl für den Umsturz als für das Gleiten. Obgleich die Rechnungen keine Rücksicht auf das Gewicht der Erde nehmen, die auf die Mauerkrone *CD* wirken, und obgleich in ihnen die Erdfüllung nur bis zur Mauerkrone reicht, so ist doch das Resultat um so mehr für die Halbbekleidungen anzunehmen, als für diese der Einfluß des Prismas *ICH*, dessen Gewicht zu dem der Mauer hinzukommt, um so schneller wächst, je mehr die Linie *BG* gegen die Erde geneigt ist; dies findet annäherungsweise bei dem auf den Theil *CH* dieser Linie ausgeübten Druck Statt, wie man aus den Konstruktionen Figur 12 sehen kann.

Die große Zahl von Erdbekleidungen, deren innere Wand gegen die Ausfüllung geneigt ist, beweis't, daß die alten Ingenieure die Vortheile dieser Neigung nicht verkannten; allein ein vielleicht weniger bekannter Umstand ist der, daß Vauban selbst zuweilen in diesem Sinne sein Normalprofil geändert hat, wenn die Umstände solche Ersparungen erlaubten, da man den Befestigungsmauern keine so geringe Stärke geben darf, daß sie schon durch die ersten Kanonenschüße aus der Ferne zerstört werden.

134. Die Figur 15 stellt ein Eskarpeprofil der geraden Seite der Bastion 35 zu Brest dar, welche zu Vaubans Zeiten erbaut, aber erst in der letzten Zeit von Picot, dem wir diese Mittheilung verdanken, terrassiert ist. Die Strebepfeiler, mit denen dies Profil befestigt ist, sind 15′ von Mitte zu Mitte entfernt, ihre Breite an der Wurzel ist $2^m,2$ und oben $1^m,8$. Vauban hatte in seinen Memoiren von 1683 über die Wiederherstellung der Befestigung von Brest, für die weniger hohen Theile ein Profil vorgeschlagen, das

*) Memorial Nro. IV pag. 178 etc.

nur 3½ Kubiktoisen Mauerwerk auf die laufende Toise enthält und was ohne Zweifel das fragliche Profil ist.

Die Bekleidungen dieser Befestigung wurden zu Vaubans Zeiten aufgeführt, wurden aber größten Theils erst 1750 terrassiert und haben seit dieser Zeit vollkommen den Erddruck ausgehalten.

Die Gestalt des Erdaufwurfs, die Natur der Erde und des Mauerwerks sind uns nicht bekannt und können wir daher das Profil Figur 15 keiner genauen Rechnung unterwerfen; ist aber die Erde und das Mauerwerk von mittlerer Beschaffenheit, und hat der Erdaufwurf 2^m^ Höhe über der Mauerkrone, so findet man, daß das Moment des Mauerwerks mit dem der Strebepfeiler etwas das doppelte des Drucks übertrifft, während das der Mauer allein ihm beinahe gleich ist. Dieser letzte Umstand und die Form des Profils selbst zeigen zur Genüge an, daß Vauban es nicht dazu bestimmt hatte, einen gewöhnlichen Erdaufwurf zu tragen, der die Krone der Mauer bedeckte, sondern daß er aus ökonomischen und militärischen Gründen, wie bei vielen andern Umständen, vor diesem Aufwurf einen mehr oder weniger breiten Rückweg hergehen laßen wollte, der zur Verminderung des Drucks dienen sollte (§. 178).

Wie dem auch sei, dies Beispiel dient als Beleg zu dem §§. 89 seqq. gesagten, um zu beweisen, daß Vauban sich durch eine mechanische Theorie leiten ließ, die er verschiedenen Umständen anzupassen wußte. Was das Prinzip der konstanten Erdüberhöhung betrifft, so würde die Bestimmung desselben in dem gegenwärtigen Falle, wo die nöthigen Elemente fehlen, unmöglich sein; wenn man ihm aber den proportionalen Stabilitätskoeffizienten, der von Français zuerst eingeführt ist, vorziehen wollte, so wird es immer leicht sein, die graphischen Auflösungen dieses Kapitels auch auf eine solche Annahme anzuwenden, da man nur $\delta = \delta_1$ in unseren Hauptgleichungen der Einheit gleich anzunehmen, und die Böschung *IE* (Figur 7 und folg.) bis zu der $5^m,5$ oberhalb des Erdaufwurfs gelegenen Horizontale verlängert anzunehmen brauchte.

Zweites Kapitel.

Rein geometrische Theorie des Druckes und der Hebkraft der Erde, die auf Profile mit beliebigen Erdaufwürfen anwendbar ist.

135. Die analytischen oder geometrischen Auflösungen, die uns bisher beschäftigt haben, setzen das Prisma vom größten Druck in dem Raume voraus, der von der innern Böschung des Erdaufwurfs begrenzt wird; und daß die Abdachung dieses letztern durch eine durch dessen Mitte gehende Horizontale ersetzt sei, endlich daß die äußere Böschung des Erdaufwurfs wenigstens eben so steil sei, als die natürliche Böschung der Erde. Allein namentlich der letzte Umstand tritt oft z. B. bei Erdschanzen oder bei Bekleidungen ein, die Aufwürfe von verschiedener Neigung und Richtung halten; dann kann der Bruch wirklich bei der Böschung mit geringem Abhange *lE* Figur **16** eintreten, wenigstens für eine Reihe von Lagen des Punktes *b* auf der innern Seitenwand *BH* der Mauer. Diese Lagen gestatten aber Bruchlinien *bX*, die die obere Fläche *EF* des Erdaufwurfs diesseits ihres Endpunktes *E*, und folglich *lE* in einem Theile *Z* treffen; sie erfordern offenbar, daß das Druckprisma *bHEX*, für das bisher eine vierseitige Form (§§. **2** und **124**) angenommen ist, einfach durch das Prisma *bHZ* ersetzt werde.

136. Um sich hiervon zu überzeugen genügt es, den besondern Fall zu betrachten, wo die innere Seitenwand der Mauer vertikal ist, und für den die Sache klar wird, wenn man sich auf die Konstruktion des Punktes *x* bezieht, die in §. **102** angezeigt ist; vermittelst direkter Betrachtungen, die bald auseinandergesetzt werden sollen, wird die Sache aber noch einleuchtender. Es genügt uns hier, den Mangel an Allgemeinheit bezeichnet zu haben, den die Auflösungen und Formeln §§. **1** seqq. besitzen, die selbst dann noch einen reellen Werth für die Größe oder das Moment des Druckes geben, wenn dieser Werth nicht mehr auf die Aufgabe anwendbar ist, und sonach auch die Nothwendigkeit erkennen laßen, diesen Auflösungen und der Theorie eine Ausdehnung zu geben, die auch für diese fehlerhaften und viele andere in der Praxis vorkommende Fälle an-

wendbar ist. Da aber der analytische Weg, der bisher gebraucht wurde, sehr weitläufig würde, so haben wir ihn ganz verlaßen, um demjenigen zu folgen, der am einfachsten und direkt zum Ziele führt, und zugleich die verschiedenen Aufgaben sehr deutlich macht.

Vorbemerkungen über den Druck und die Hebkraft der Erde.

137. Sei *BHIEFJL* (Figur 17 und 18) das Profil eines prismatischen Erdaufwurfs, der sich gegen eine geneigte Ebene *BH*, die die innere Seitenwand einer Mauer vorstellt, und nöthigenfalls nach oben verlängert gedacht werden muß, stützt; wir wollen nun für einen beliebigen Punkt *b* dieser Böschung das Prisma *bHIEXb* aufsuchen, das sich zuerst in der doppelten Hypothese ablösen wird, wo die Kraft gegen *bH* rein passiv ist, und nur die Wirkung des Gewichtes vom obigen Prisma auszuhalten hat, oder wo sie im Gegentheil aktiv ist, indem sie strebt, dasselbe Prisma auf der Böschung *bX*, begrenzt durch ihren Durchschnitt *X* mit einer der ebenen Oberflächen *EF* des Erdaufwurfs, hinaufzuschieben.

Die Kraft in Bezug auf die erste dieser Annahmen ist keine andere, als der Druck, oder die Resultante der Pressungen auf die Länge *bH*, und ihr Werth entspricht bekanntlich der Lage von *bX*, für die sie ein Maximum wird. Was die zweite Hypothese betrifft, die augenscheinlich ein Minimum ist, so kann sie aus dem Druck eines Gewölbes oder einer beliebigen Erdmasse, die sich gegen *BH* stützt, entstehen. Ihre überwiegende Wirkung würde die Erhebung des Prismas *bHIEX* durch das Ueberwinden des Widerstandes herbeiführen, und soll deshalb sie die Hebkraft der Erde (butée des terres) genannt werden.

Man kann aber auch die Aufgabe in diesem letztern Falle anders betrachten und annehmen, daß in Folge eines ursprünglichen oder eines erst gemachten Drucks durch zufällige Ueberhöhung oder Beschädigung, die Erde des betrachteten Körpers eine Sprungkraft oder Reaktionskraft erlangt hätte, die größer ist als die, welche dem einfachen Gewichte ihrer eigenen Theile zugehört und deren Wirkung darin besteht, daß sie ein Bestreben hervorbringt, die Erde zu erheben, sobald die Ursache der fremdartigen Zusammenpressung aufgehört hat. Nur in diesem Sinne kann man mit Cou-

lomb*) einverstanden sein, daß diese Reaktionskraft der wirklichen Pressung der Erde oder ihrem Drucke als obere Grenze diene; denn in dem natürlichen Zustande, zu dem die Erde sogleich zurückzugehen strebt, würde dieser Druck nicht von dem verschieden sein, welcher dem zuerst erwähnten Maximum zukommt. Immer muß man bei der Konstruktion von Erdbekleidungen die Ursachen zu vermeiden suchen, die diesen zufälligen Druck herbeiführen können, dessen obere Grenze aber doch zuweilen gekannt werden muß.

138. Nach diesen vorläufigen Betrachtungen glauben wir beide Fälle der Frage gleichzeitig behandeln zu müßen, von denen man bis jetzt denjenigen, der sich auf ein Minimum bezog, vernachläßigte, wahrscheinlich, weil der eingeschränkte Sinn, unter dem Coulomb denselben betrachtete, die praktische Nützlichkeit nicht erkennen ließ.

Zu größerer Allgemeinheit wollen wir auf die Reibung der Erde unter sich selbst nach der Länge bX, und gegen das Mauerwerk oder die Erde nach der Länge der Böschung BH, Rücksicht nehmen, was in gewissen Fällen der Anwendung nöthig ist; um aber in keine unnütze Weitläuftigkeiten zu gerathen, wollen wir unbestimmt durch $f_2 = tg\varphi^1$ den Koeffizienten dieser letztern Reibungen nennen, deren Winkel mit dem Horizonte also durch φ^1 dargestellt wird. Bezeichnet man ferner (§. 1) durch $f = \cot g\alpha = tg\varphi$ den Koeffizienten der Reibung der Erde auf sich selbst, deren Winkel durch $\varphi = 90^0 - \alpha$ gemeßen wird, und im allgemeinen durch N und N_1, oder nach Größe und Richtung in Figur 17 und 18 durch pq und p^1q^1 die Gesammtpressungen von außen nach innen rechtwinklig auf bX und bH, so folgt, daß, nachdem man mit diesen Linien die Winkel qpm, $q^1p^1m^1$ respektive gleich φ und φ^1 gebildet hat, die nach oben gerichtet sind (Figur 17), wenn das Prisma herabfallen will, oder nach unten (Figur 18), wenn es nach aufwärts strebt, und nachdem man die Rechtecke $pqmn$, $p^1q^1m^1n^1$ vollendet hat,

$$fN = pq.tg\varphi = qm = pn$$
$$f_2N^1 = p^1q^1.tg\varphi^1 = p^1n^1$$

auch nach Größe und Richtung die Reibungen vorstellen, zu denen

---

*) Mémoires des Savans étrangers 1773 auch Théorie des machines simples par Coulomb. Paris chez Bachelier.

diese Pressungen nach der Länge bX und bH in den beiden erwähnten Fällen Veranlaßung geben, wo nämlich das Prisma $bHIEXb$ gerade weichen will, entweder in Folge seines eigenen Gewichtes oder einer nach der Diagonale $p^1 m^1$ wirksamen Kraft, deren Angriffspunkt auf der soliden Wand BH hier nicht durch die absolute Bewegung dieser Wand oder der Erde bewegt wird, sondern durch ihre relative virtuelle Bewegung Denn die Erschütterung des äußern Körpers geschieht unabhängig sowohl durch Gleiten nach horizontaler Richtung, als auch durch Umsturz von außen nach innen um den Punkt B (Figur 18), wenn von der Hebkraft die Rede ist, oder von innen nach außen um den äußern Punkt A (Figur 17), wenn von einem wirklichen Drucke die Rede ist.

Auf die Kohäsion auf bX und Adhäsion auf bH, deren Wirkung rein virtuell ist, und, ausgenommen vielleicht bei den thonhaltigen Erden, nach den, dem Bruch vorhergehenden Augenblicken aufhören, könnte man Rücksicht nehmen, wenn man die Coulombschen Hypothesen zuließe; es ist aber aus mehr als einer Rücksicht beßer, ihre Betrachtung von der Aufgabe auszuschließen.

Bestimmung des Druckes und der Hebkraft in der allgemeinsten Annahme.

139. Die eben gemachten Bemerkungen machen diese Aufgabe sehr leicht, denn man schließt daraus, daß die Resultanten:

$$pm = N\sqrt{1+f^2} = \frac{N}{\cos\varphi},\quad p^1 m^1 = N^1\sqrt{1+f_2^2} = \frac{N^1}{\cos\varphi^1},$$

die wir respektive F und F^1 nennen wollen, nach entgegengesetzten Richtungen genommen, die wahren Kräfte auf die Böschungen bX und bH, einentheils des auf dieser Böschung herabstrebenden (Figur 17) und anderseits des auf dieser Böschung hinaufstrebenden (Figur 18) Prismas vorstellen; während dieselben Resultanten, nach ihrer eigenthümlichen Richtung genommen, dann die Kräfte vorstellen, welche dem Gewichte $Q = p$.Oberfl.$bHIEXb$ dieses Prismas das Gleichgewicht halten.

Fällt man nun vom Punkte b auf ihre verlängerten Richtungen unbegrenzte Normalen ba und ba^1, so werden sie durch ihre Durch-

schnitte mit einer beliebigen Horizontale aa^1, die selbst normal auf der Richtung von Q steht, ein Dreieck aa^1b bilden, das als unveränderlich mit dem Prisma, aus dem es sich ergiebt, verbunden gedacht werden kann, da die Winkel φ und φ^1 gegeben sind, und das mit den rechtwinklig auf seine Seiten wirkenden Kräften F, F^1 und Q im Gleichgewichte stehen muß. Dies erfordert aber nach einem bekannten statischen Satze:

1) daß alle diese drei Kräfte von außen nach innen, oder von innen nach außen in Bezug auf das fragliche Dreieck gerichtet sein müßen; diese Bedingung wird aber nur offenbar dann erfüllt sein, wenn die Neigung der Linie bX gegen die Vertikale kleiner ist als die der natürlichen Böschung für Figur 17, und größer für Figur 18, da sonst ba links von ba^1 liegt, ohne daß F und F^1 ihre Richtung oder ihre Zeichen ändern und also die Art der Wirkung selbst geändert wird.

2) daß die Seiten des Dreiecks aba^1 respektiv proportional seien den Kräften, die auf sie rechtwinklig wirken; also muß:

$$pm \text{ oder } F = Q\frac{ba}{aa^1} = F^1\frac{ba}{ba^1},\ p^1m^1 \text{ oder } F^1 = Q\frac{ba^1}{aa^1},$$

woraus bei passend gewähltem bX die Werthe von F und F^1 folgen, deren letzterer überdies (§. 137) der Bedingung entsprechen muß, daß es ein Maximum für Figur 17 und ein Minimum für Figur 18 unter allen denjenigen sei, die verschiedenen Größen dieses Winkels oder verschiedenen, dem Punkte X auf EF gegebenen, Lagen entsprechen.

140. Man kann diese Ausdrücke auf andere noch mehr entwickelte bringen, wenn man das ganze Dreieck ban^1 etwas um den Scheitel b und zwar um einen Winkel $Xba = qpm = \varphi$ dreht, d. h. um einen Winkel, der dem der natürlichen Böschung der Erde gegen den Horizont gleich ist, so daß die Richtung ba mit bX zusammenfällt, und die Richtung von ba^1 mit der einer Geraden bO, die mit bH oder bG den Winkel $ObG = Oba^1 + a^1bG = \varphi + \varphi^1$ macht, der also gleich der Summe der Winkel der Reibungen der Erde auf einander und mit dem Mauerwerke ist.

Es folgt daraus in der That, daß man, — weil die horizontale Seite aa^1 parallel mit der natürlichen Böschung der Erde, deren Richtung auf den Punkt b bezogen, hier durch die Gerade EM dar-

gestellt ist, die EF verlängert in M trifft, — in den obigen Ausdrücken für F und F^1 anstatt der Seiten ba, ba^1 aa^1 des fraglichen Dreiecks die Seiten bX, bx und Xx des Dreiecks bxX setzen kann, welches dadurch gebildet wird, daß man von dem willkührlichen Punkte X aus, nach bO die Linie Xx parallel zu bM zieht. Ferner kann man immer annehmen, daß man nach bekannten Methoden der Geometrie die Figur $bHIEb$ in ein gleich großes Dreieck bKE verwandelt habe, dessen Basis KE, auf der Richtung EF gelegen, und dessen Höhe bT oberhalb dieser Basis, also gegeben sind. Mithin werden die Werthe von F und F^1, da $\frac{1}{2}p.bT.KX$ das Gewicht des Erdprismas $bHIEX$ oder bKX vorstellt:

$$F=\tfrac{1}{2}p.bT.KX.\frac{bX}{xX},\quad F^1=\tfrac{1}{2}p.bT.KX.\frac{bx}{Xx}.$$

Will man aber direkt den Werth von F oder N (§. 139) konstruieren, wenn die Lage von bX à priori gegeben ist, oder wenn man sie aus den Bedingungen des Problems erhalten hat, so wird es einfacher sein, zuerst die Größe von F^1 zu bestimmen und daraus dann auf die von T, mittelst der Proportion:

$$F=F^1\frac{ba}{ba^1}=F^1\frac{bX}{bx}$$

zu schließen.

Wir wollen uns demnach in der Folge nur mit dem Ausdruck von F^1 beschäftigen, in welchem KX, bx und Xx Veränderliche oder Unbestimmte sind, die man auf die kleinstmögliche Anzahl herabbringen muß, indem man sie z. B. alle auf bO bezieht, deren Richtung EF in O schneidet.

141. Unter den verschiedenen Mitteln, um diesen Zweck zu erreichen, wählen wir das folgende aus, weil es die Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe auf rein elementare Betrachtungen reduziert.

Zuerst geben die ähnlichen Dreiecke OxX und ObM:

$$Xx:OX=bM:OM,$$

also wird:

$$F^1=\tfrac{1}{2}p\,bT.\frac{OM}{bM}.\frac{KX.bx}{OX}=\tfrac{1}{2}p.\sin ObM.Ob.\frac{KX.bx}{OX},$$

da sich die Fläche des Dreiecks ObM sowohl durch $\frac{1}{2}bT.OM$ als auch durch $\frac{1}{2}\sin ObM.Ob.bM$ ausdrücken läßt.

Fällt man nun vom Punkte K auf bO und bX die Ordinaten Ky und KY, die ihnen umgekehrt parallel sind, so erhält man wegen Aehnlichkeit der Dreiecke KXY und ObX und wegen $KY=by$:

$$F^1=\tfrac{1}{2}p.\sin ObM.bx.by,$$

welcher Ausdruck sich leicht konstruieren läßt, und dessen Maximum wir für den Fall Figur 17, wo der Druck, und dessen Minimum wir für den Fall Figur 18, wo die Hebkraft die Lage des X auf EF verändert, suchen müßen.

Nun sind die Punkte x und y miteinander durch die Gerade bO durch eine sehr einfache graphische Relation verbunden, die man entdecken wird, indem man den festen Punkt K auf diese Linie nach k durch die zu Xx oder bM parallele Ordinate Kk projiziert; denn wegen Aehnlichkeit der Dreiecke erhält man

$$\frac{Ox}{Ok}=\frac{OX}{OK}=\frac{Ob}{Oy};\ \text{woraus}\ Ox.Oy=Ok.Ob.$$

Legt man also vom Punkte O aus eine Tangente Ot an den über kb als Durchmeßer konstruierten Kreis, so erhält man $\overline{Ot}^2=Ok.Ob=Ox.Oy$ und es wird folglich der neue Kreis, der diese Tangente mit berührt, und durch einen der Punkte x und y geht, auch durch den andern gehen; legt man nun vom Punkte b aus an ihn die Tangente bu, so giebt sie

$$\overline{bu}^2=bx.by;\ F^1=\tfrac{1}{2}p.\sin ObM.\overline{bu}^2;$$

dies giebt für F^1 eine sehr einfache Konstruktion, deren Analogie mit denen §§. 101 und 124 augenscheinlich wird, wenn man bu durch einen Kreisbogen auf bO überträgt und bemerkt, daß nach der Konstruktion (140) der Winkel bkK, das Supplement von ObM, gleich ist dem Winkel ba^1a, der durch ba^1 mit dem Horizonte gebildet wird, so daß $\sin ObM$ nichts anders ist, als der Cosinus der Neigung dieser letztern Geraden gegen die Vertikale, die selbst mit bG den Winkel $a^1bG=m^1p^1q^1=\varphi^1$ (§. 138) macht, und also die Stelle der wirklichen Mauerwand in der Aufgabe der schon erwähnten §§. 101 und 125 vertritt. Nennt man in der That der

Analogie gemäß, ε^1 den Winkel, welcher diese Neigung mißt und der immer aus φ^1 und E (§. 123) berechnet werden kann, so erhält man

$$F^1 = \tfrac{1}{2} p \cos\varepsilon^1 . \overline{bu}^2.$$

142. Bis hieher ist alles gleich für die beiden Fälle Figur 17 und 18, d. h. für den Druck und die Hebkraft; allein hier trennen sich die Auflösungen in gewisser Hinsicht, da F^1 ein Minimum in der einen, ein Maximum in der andern sein muß.

Handelt es sich namentlich (Figur 17) um den Druck, den wir auch ferner P nennen wollen, so bemerkt man sogleich, daß der größte Werth von F^1 unter allen, die der Fläche EF des Erdkörpers angehören, da ObM konstant ist, dem größten Werthe von bu selbst entspricht, d. h. dem kleinsten der Kreise die Ob schneiden und Ot in t berühren und folglich demjenigen von ihnen, der Ob in einem Punkte x^1 berührt, der zwischen den Enden O und b liegt. Man hat daher für die Lage von bX in Bezug auf das verlangte Maximum

$$Ox^1 = Ot = \sqrt{Ok + Ob}, \; bu = bx^1$$

$$P = \tfrac{1}{2} p . \sin ObM . \overline{bx^1}^2 = \tfrac{1}{2} p \cos\varepsilon^1 \overline{bx^1}^2.$$

Hat man also x^1 gefunden, so projiziere man es nach X^1 auf OM oder EF durch die Parallele x^1X^1 zu bM, dann wird bX^1 die der Bruchlinie entsprechende Lage sein, die man übrigens auch direkt erhält, wenn man auf OM

$$OX^1 = \sqrt{OK . OM}$$

nimmt, wie dies offenbar aus dem Parallelismus der Linien Kk, X^1x^1 und bM folgt.

143. Diese Auflösung (die [Figur 17] darauf hinaus kommt, die Geraden bO und bM [§. 140] zu ziehen, das Dreieck bKE zu konstruieren, welches der Polygonalfläche $bHJEb$ gleichkommt, und auf OM die mittlere Proportionale Ox^1 zwischen Ok und OM zu nehmen, um X^1 zu finden, oder auf Ob die mittlere Proportionale Ox^1 zwischen Ok uud Ob, um x^1 und folglich P zu erhalten,) ist, wie man sieht, ganz unabhängig von der Lage der Böschung bH in Bezug auf die Vertikale des Punktes b, oder vielmehr, sie bleibt dieselbe, wie auch diese Lage beschaffen sein möge. Man muß jedoch bemerken, daß sie nicht dem vorgelegten Probleme zukommt, sobald der Punkt

X^1 zwischen die Enden E und F der Oberfläche des Erdaufwurfs fällt, auf das die Konstruktion besonders vollzogen ist; denn fiele er diesseits oder jenseits, so wäre dies ein Zeichen, daß die Linie des Bruches oder des größten Druckes bX^1 selbst einer Fläche angehörte, die diesseits oder jenseits von EF liegt, und die man daher statt dieser letztern einführen müßte, indem man auf sie dieselbe Konstruktion anwendete, bei der dann die Geraden bO und bM offenbar dieselben blieben.

Anderseits wird man bemerken, daß es zwei Ot in t berührende Kreise giebt, die zugleich Ob berühren, der eine in x^1 auf der Seite von b in Bezug auf O, und der einem wirklichen Maximum angehört, der andere in einem Punkte, der nach der entgegengesetzten Seite eben so weit von O entfernt liegt, und der einem einfachen Minimum entspricht, obgleich sein Werth augenscheinlich den des vorigen Maximums überschreitet. Aber dies Minimum gehört einer rein abstrakten Aufgabe an, da es vorausgesetzt, daß die Bruchlinie bX des Erdprismas nach außen hin in Bezug auf die Erdmasse gerichtet sei.

144. Die geometrische und mechanische Interpretation des Maximums würde in keinem Falle schwierig sein; die Diskussion zeigt einleuchtend: 1) daß die Tangente bu und folglich der Druck F^1 (§. 141) in Bezug auf verschiedene Lagen der hypothetischen Bruchlinie bX, null ist, wenn diese Linie mit der natürlichen Böschung der Erde bM zusammenfällt, und nicht mehr existiert, oder imaginär wird (§. 130), wenn der Punkt X über M hinaus in Bezug auf O oder G genommen ist; 2) daß bu und F^1 progressiv wachsen, wenn der Punkt X sich dem X^1 oder x dem x^1 nähert; 3) endlich, daß sie dann abnehmen und wieder durch dieselben Werthe gehen, wenn X sich von X^1 entfernt und dem Punkte K nähert, für den sie wieder null werden, und der also mit M als Grenze dient für die verschiedenen Lagen, welch bX annehmen kann, damit man noch reelle Werthe für bu oder F^1 erhält.

145. Diese letztern Umstände setzen wesentlich voraus, daß der Durchschnitt M der Parallele bM zur natürlichen Böschung der Erde mit der Seite EF über den Punkt K hinaus in Bezug auf O liegt; dies erfordert, daß die Böschung von EF, wenn sie gegen die Mauer gerichtet ist, sanfter sei, als die natürliche Böschung der Erde, denn wenn das Gegentheil statt fände, oder wenn nur EF parallel zu bM

wäre, so würde der absolute Werth von F^1, der immer null ist, wenn bX mit bK zusammenfällt, kein merkliches Maximum annehmen können, oder vielmehr er würde immer größer werden, je mehr sich der Punkt X vom Punkte K entfernte bis zum unendlichen nach rechts, d. h. nach der Seite, die der, dann vom Punkte M angenommenen Lage, entgegengesetzt ist. Hieraus folgt nun, so wie noch spezieller daraus, daß keine Tangente von O aus an den, über kb oder KM als Durchmeßer konstruierten, Kreis gezogen werden kann, daß der Bruch niemals bei einer Fläche EF des Erdaufwurfs geschehen kann, dessen Abhang gegen die Stützebene BH, die weichen müßte, steiler wäre, als die der natürlichen Böschung der Erde; aber daß dieser Bruch immer statt finden wird, wenn im Gegentheile die Böschung sanfter ist und mehr nach dem Innern der Masse hin liegt; was mit der Erfahrung übereinstimmt und überdies die Mittel zur Auflösung, die in der I. Sektion dieser Abhandlung und in dem Anfange der gegenwärtigen aufgestellt sind, rechtfertigt.

146. Kommt man jetzt speziell auf die Frage über die Hebkraft der Erde (Figur 18) zurück, für die F^1 und bu ein Minimum werden müßen (§. 137), so muß man bemerken, daß im Gegensatze zu dem, was bei dem vorigen Fall geschah, dies Minimum dem größten der beiden Kreise zugehört, die die Richtung bO und die Ot in t berühren, d. h. demjenigen, der seinen Berührungspunkt X^1 außerhalb bO hat, und für den

$$Ox^1 = Ot = \sqrt{Ok.Ob},\ bx^1 = bu \text{ ist,}$$

was (§. 141), wenn man in der Folge B die Hebkraft zum Unterschiede vom Druck P nennt, giebt

$$B = \tfrac{1}{2}p.\sin ObM.\overline{bu}^2 = \tfrac{1}{2}p.\cos\varepsilon^1.\overline{bx^1}^2$$

und für die Bruchlinie diejenige Gerade, welche von b nach dem Punkte X^1 geht, wo die zu Kk oder bM parallele Linie x^1X^1 die Verlängerung von MO trifft, welcher Punkt auch unmittelbar gegeben ist durch die Relation

$$OX^1 = \sqrt{OK.OM},$$

d. h. es muß OX^1 auf der fraglichen Verlängerung genommen, gleich sein der, vom Punkte O an den über KM als Durchmeßer beschriebenen Kreis, gezogenen Tangente.

147. Um also endlich die Hebkraft oder das Minimum des Widerstandes zu finden, der durch eine Erdmasse *bHIE....* der Wirkung einer festen Ebene *bH* entgegengesetzt wird, ziehe man, ein für alle Mal, durch den Punkt *b* nach außen hin in Bezug auf diese Masse die Parallele *bM* zur natürlichen Böschung der Erde, und nach innen die Gerade *bO*, die mit *bH* oder *BG* den Winkel *GbO* bildet, der gleich ist der Summe der Winkel φ und φ^1 der Reibung der Erde gegen einander und gegen *bH*; dann nehme man auf der unbegrenzten Richtung der ersten Fläche *EF* des Erdaufwurfs, die ganz oder zum Theil über *bO* hinaus in Bezug auf *bG* liegt, den festen Punkt *K* so, daß die Fläche *bKX* beständig gleich ist der Fläche *bHIEX*; projiziert man endlich diesen Punkt nach *k* auf *bO*, parallel mit *bM*, und bestimmt die Durchschnitte *M* und *O* dieser letztern Geraden mit der Richtung von *EF*, so hat man nur noch auf der Verlängerung von *MO* oder von *bO* die Linie OX^1 oder Ox^1 gleich der von *O*, an den über *KM* oder *bk* als Durchmeßer beschriebenen Kreis, gelegten Tangente zu nehmen, um die Punkte X^1 und x^1 zu bestimmen, die derselben Parallele zu *bM* angehören, und die die verlangte Bruchlinie bX^1 und die Hebkraft *B* bestimmen.

Dies Verfahren, welches dem für den Druck (§. 143) ähnlich ist, wird immer geometrisch anwendbar sein, wenn der Punkt *O* außerhalb *KM* liegt, da alsdann namentlich die Fläche *EF*, nach der entgegengesetzten Seite hin, wo die Stütze *bH* sich befindet, einen sanftern Abhang darbietet, als der der natürlichen Böschung *bM* der Erde ist; allein sie liefert keine wirkliche Auflösung, sobald X^1 zwischen *E* und *F* fällt; läge z. B. dieser Punkt, wie in Figur 18, jenseits von *EF* in Bezug auf *O*, so müßte man die Operation für die folgende Fläche *FJ* erneuern; was um so leichter sein würde, als die Geraden *bM* und *bO* schon gezogen wären.

148. So oft es in diesem letzten Falle sich ereignete, daß die Verlängerung der Linie *bF* unbegrenzt in die Erdmasse jenseits *F* fiele, wie z. B. in der Annahme Figur 19, so würde diese Richtung augenscheinlich die der Bruchebene sein, und der kleinste entsprechende Werth von F^1 (§. 141) der wahre Werth der Hebkraft sein; denn die Diskussion in Bezug auf *bu* (Figur 18) lehrt, daß diesseits von *bO* in Bezug auf *bH* keine mögliche Bruchlinie *bX* liegt,

übereinstimmend mit der ersten Bedingung, die am Ende des §. 139 angezeigt ist, während von der Lage *bO* aus, und indem man sich immer mehr nach rechts entfernt, F^1 zuerst unendlich ist, und dann, bis *bX* mit bX^1 zusammenfällt, abnimmt. Durch diese Linie wird aber hier (§. 19) der Annahme nach keine wirkliche Bruchlinie angedeutet, so wie ebenfalls nicht durch alle diejenigen Geraden *bX*, welche unterhalb *bF* liegen, und deren Verlängerungen unbegrenzt in den Erdkörper fallen.

Es ist nicht nöthig hier bei den Folgerungen stehen zu bleiben, die sich aus dem Falle ergeben, wo die Böschung der Fläche *EF* (Figur 19) steiler ist als die natürliche Böschung der Erde: Die Diskussion würde lehren, was auch à priori einleuchtet, daß der obere Theil des Erdaufwurfs, der durch die Parallele zu dieser letztern Böschung durch den Punkt *F* begrenzt wird, keine Hebkraft erzeugen, sondern von selbst herabfallen würde, wenn er nicht durch künstliche Mittel gesichert wird, auf die man dann bei der Auflösung der Aufgabe Rücksicht nehmen müßte.

149. Rücksichtlich der Bruchlinien *bX*, die in den Annahmen der Figuren 18 und 19 unterhalb der Horizontale liegen können, ist es wichtig zu bemerken, daß die erstere Auflösung dann modifiziert werden muß, da das Prisma *bHIEX* herabzusinken, anstatt in die Höhe zu gehen, strebt, während die Elemente der festen Ebene *BH* nahe horizontal oder rechtwinklich auf ihre gemeinschaftliche Richtung fortschreitend gedacht werden; daraus folgt nach der besondern Natur der Aufgabe (§. 138) daß die Richtung der Reibung, die dieselbe auf der Bruchlinie *bX* geblieben ist, auf der Fläche *bH* sich ändern, und folglich von unten nach oben vor sich gehen kann. Dieser Umstand wird im Allgemeinen eintreten, sobald die Neigung der Linie *bX* gegen den Horizont, oder die der virtuellen Geschwindigkeiten der Elemente dieses Prisma, kleiner wird als die der virtuellen Geschwindigkeiten der Elemente des festen an *BH* gelehnten Körpers. Der Fall, wo diese respektiven Geschwindigkeiten parallel sind und die relative Verschiebung nach dieser Ebene null ist, bietet einen Mittelfall dar, für den die Reibung nur noch so betrachtet werden darf, als wenn *BH* eine erdichtete Schicht wäre, die die beiden Theile desselben Erdaufwurfs trennte.

150. Bezieht man sich auf die allgemeinen Betrachtungen

§§. 138 seqq., so wird man hiernach sehen, daß die einzige an die Auflösung des Problems über die Hebkraft anzubringende Veränderung für solche Fälle darin besteht, daß man (Figur 19) statt des Winkels $ObH = \varphi + \varphi^1$ (§. 140) einen andern $\varphi - \varphi^1$ setzt, der immer positiv ist und nach der Erdseite hin liegt, da der Erfahrung gemäß der Winkel φ der gegenseitigen Erdreibung allgemein größer ist als der Winkel φ^1 der Reibung der Erde mit dem Mauerwerk.

Diese Diskussionen waren nöthig, um den praktischen Anwendungen der gegenwärtigen Theorie die Ausdehnung und Genauigkeit in dem ganzen Maaße zu geben, deren sie in gewissen Fällen fähig sind; deswegen wollen wir auch noch die Momente und Hebelarme der Kräfte P oder B aufsuchen.

Bestimmung der Momente und der Hebelarme.

151. Wir wollen uns zuerst mit den verschiedenen Pressungen und Hebkräften beschäftigen, die sich auf dieselbe Seite EF (Figur 17 und 18) des gegebenen Profils des Erdaufwurfs $BHIEFJ\ldots$ und auf die entsprechende Lage des Punktes b auf der Stützebene BH der Erde beziehen; wir wollen dann sehen, was zur Bestimmung der Momente in Bezug auf die Gesamtheit der Linien, die dies Profil begrenzen, und auf einen beliebigen Theil von BH, geschehen muß; d. h. man wird sich hier auf die Betrachtung der Ausdehnung der aufeinanderfolgenden Lagen von b beschränken, deren entsprechende Bruchlinien bX^1, EF zwischen ihre Endpunkten treffen und die folglich Werthe $\frac{1}{2}p.\sin.ObM.\overline{bx^1}^2$ oder $\frac{1}{2}p.\cos.\varepsilon'\overline{bx^1}^2$ (§§. 141 seqq.) geben, die wirlichen Pressungen oder Hebkräften angehören. Zuvor müßen wir aber noch etwas über die Art und Weise sagen, wie man die Lage des Punktes K (§. 140) bestimmt, von der OX^1 und bx^1 abhängen, um die erste Auflösung entwickelter und einfacher zu machen.

152. Hierzu verwandele man zuerst den Theil des Polygons $HIEH$ (Figur 20) der vor EF liegt, und der durch die Diagonale HE begrenzt ist, in ein gleich großes Dreieck HE^1E, das diese Diagonale zur Grundlinie und zum gegenüberliegenden Scheitelpunkt einen Punkt E^1 der Richtung EF hat; was hier z. B. in dem besondern Falle der Figur, wo der Seite EF nur die beiden

Seiten HI und IE des Erdaufwurfprofil's vorhergehen, dadurch geschieht, daß man von der Spitze I die Parallele IE^1 zu HE zieht, dann wird folglich das Viereck bHE^1Eb, das unveränderlich mit der Lage des Punktes b auf BH ist, den Theil $bHIEb$ des Polygons, dem es gleich ist, ersetzen. Die Aufgaben über die Fläche E^1F und b sind also, wenigstens was den Druck betrifft, auf die zurückgeführt, welche den Gegenstand des 1sten Kapitels dieser Sektion ausmachen, ausgenommen daß E^1F eine beliebige Richtung annehmen kann, und daß man auf die Bruchlinien bX, die diesseits bE liegen, keine Rücksicht zu nehmen braucht.

Uebrigens würde die Transformation hier auch dadurch bewerkstelligt werden können, daß man umgekehrt den Scheitel I nach H^1 auf bH durch die Verlängerung der Parallele E^1I zu HE, projiziert, wodurch man einfach nur noch das Dreieck bH^1E gleich dem Viereck $bHIEb$ erhielte. Projiziert man endlich nach K, auf die verlängerte FE den Punkt H durch die Parallele HK zu bE^1, oder den Punkt H^1 durch die Parallele H^1K zu bE, so wird man die Polygonalfläche $bHIEX$ in die Dreiecksfläche bKX für alle Lagen der Bruchlinie bX transformiert haben, so wie die Auflösungen §§. 40 seqq. es erfordern. Beide Transformationsarten können bei der Anwendung gebraucht werden; für die jetzige Aufgabe wollen wir aber die vorziehen, wodurch der Punkt H ein Scheitelpunkt des Polygons bleibt.

153. Dies vorausgesetzt, sei zur Vermeidung von Konfusion der Linien, $HE^1FJ\ldots$ (Figur 21 und 22) das so transformierte Profil des Erdaufwurfs, welches man an die Stelle $HIEF\ldots$ (Figur 20) oder Figur 17 und 18 setzt. Der Punkt K, veränderlich mit b, ist hier durch die Parallele HK zu bE^1 gegeben und man bestimmt den Druck P (Figur 21) oder die Hebkraft B (Figur 22) für jede Lage des b auf BH und in Bezug auf die Fläche EF insbesondre, nach den Methoden §§. 142 und 147, deren Konstruktionen hier unter denselben Buchstaben, wie Figur 17 und 18 ausgeführt sind, mit der Ausnahme, daß x und X die Stelle von x^1 und X^1 vertreten; man hat also

$$OX=\sqrt{OK.OM},\ Ox=\sqrt{Ok.Ob}$$

und

$$P \text{ oder } B=\tfrac{1}{2}p.\sin.ObM.\overline{bx}^2-\tfrac{1}{2}p.\cos.\varepsilon^1.\overline{bx}^2,$$

wo ε^1 immer (§. 141) die Neigung der erdichteten Seitenwand, (auf die die Kräfte P und B rechtwinklich wirken, und die [§. 138] mit BH einen Winkel φ^1 gleich dem der Reibung der Erde auf dem Mauerwerk, bildet) mit der Vertikale bezeichnet.

Verändern nun der Punkt b auf BH, so wie die Linien von bestimmten Richtungen bM und bO (§. 140) ihre Lage, so wird die Aufeinanderfolge der Punkte x einer gewissen Kurve angehören, auf die man, wie auf alle ihr ähnlichen in Bezug auf die verschiedenen Flächen der Erdfüllung, die Betrachtungen §§. 127 seqq. oder specieller die der §§. 119 und 120 in Bezug auf die Bestimmung des Momentes und des Hebelarmes des Druckes, anwenden muß. Um aber die Anwendung zu erleichtern und zu vereinfachen, kann es nützlich sein, die Konstruktion der Punkte x mehr nach den §§. 105, 119, 124 für die analogen Punkte a angegebenen Konstruktionen vorzunehmen.

154. Die Punkte K und X, die durch die Parallelen Kk und Xx zu bM mit den Punkten k und x verbunden sind, können sich mit der Lage des b auf BH verändern. Durch das folgende Verfahren kann man dem ausweichen.

Hat man die Parallele HR zu bO gezogen, die die Verlängerung von FE in R trifft, und durch den Punkt E^1 (§. 152) die Parallele E^1k^1 zu bM, die RH in k^1 schneidet, so nehme man auf dieser letztern Geraden (Figur 21) oder auf ihrer Verlängerung (Figur 22) $Rx_1 = \sqrt{Rk_1 . RH}$, wodurch man den Puukt x^1 der Kurve erhält, welcher der Lage H von b entspricht; errichtet man überdies für den Fall des Druckes Figur 21 im Punkte G des Durchschnitts von E^1R und BH, die Normale Gh oder Gh_1 rechtwinklich auf RE^1 oder OM, so daß sie die mittlere Proportionale zwischen GR und GE^1 wird; oder beschreibt man für den Fall der Hebkraft (Figur 22) den Kreis aus dem Mittelpunkte G, dessen Halbmeßer die mittlere Proportionale zwischen GR und GE^1 ist; zieht man endlich Rh und Oh im ersten Falle oder die Tangenten Rh^1 und Oh an den erwähnten Kreis im zweiten Falle, so erhält man aus der Relation der Linien in jeder Figur:

$$\frac{Ox}{Oh}=\sqrt{\frac{RH.Rk^1}{RG.RE^1}}=\frac{Rx^1}{Rh} \text{ oder } \frac{Rx^1}{Rh^1}{}^{*)}$$

155. Bei den besondern Annahmen §. 124, wo EF horizontal angenommen wird, vernachläßigt man die Reibung der Erde auf der Ebene BH, so daß $\varphi^1=o$ (§. 140). Der Winkel $k^1HG=ObG$ (Figur 21) und der Winkel $kE^1G=bMG$ sind hier beide gleich (§. 140) dem Winkel φ der Reibung der Erde auf einander; daher gehören die Scheitel H und E^1 der ersten dieser Winkel demjenigen Kreise an, dessen Sehne gleich ihrer gemeinschaftlichen Grundlinie k^1G ist, so daß man hat $RG.RE^1=RH.Rk^1$; dies giebt einfach $Ox=Oh$, wie §. 124, wo der Punkt a (Figur 12 und 21), den man durch $Oa=Oh^1$ erhält, x auf jeder Parallele bO ersetzt. Diese Betrachtungen sind gleichfalls anwendbar auf den Fall der Hebkraft (Figur 22); es werden bei den gegenwärtigen Voraussetzungen die Punkte H, G, E^1 und k^1 immer demselben Kreise angehören und Ox wird einfach gleich der Tangente Oh oder Oa für alle Lagen von b oder bO.

156. Das eben gesagte zeigt zugleich, wie man in dem allgemeinen Falle (Figur 21 und 22) verfahren müße, um die Aufeinanderfolge der Punkte x, namentlich (§. 150) für die Fläche EF zu finden; denn nimmt man die Hyperbel der Punkte a, die man auf Ob wie §§. 125 und 126 dadurch erhält, daß man $Oa=Oh$ setzt, als konstruiert an, so braucht man nur noch die Ordinaten Oa in dem konstanten Verhältnis von Ox zu Oh oder von Rx^1 zu

---

*) Denn man hat der Annahme nach (§. 153) $\overline{Ox}^2=Ok.Ob$ und die Aehnlichkeit der Dreiecke ObG und RHG, OKk und RE^1k^1 giebt

$$Ob=\frac{RH.OG}{RG},\quad Ok=\frac{Rk^1.OK}{RE^1};\ \text{also}\ \overline{Ox}^2=\frac{RH.Rk^1}{RG.RE^1}OG(OG\pm GK)$$

wo das obere Zeichen für Figur 21, das untere für Figur 22 zu nehmen ist.

Man hat aber auch, da HK parallel zu bE^1 ist

$$bG:HG \text{ oder } OG:RG=GE^1:GK$$

also endlich

$$\overline{Ox}^2=\frac{RH.Rk^1}{RG.RE^1}(\overline{OG}^2\pm RG.GE^1)=\frac{RH.Rk^1}{RG.RE^1}.\overline{Oh}^2.$$

Rh (Figur 21), Rx^1 zu Rh^1 (Figur 22) zu vermindern, was nach bekannten Methoden der Geometrie geschehen kann.

157. So z. B. reicht es für den Fall des Druckes (Figur 21) hin, nach der Konstruktion des Punktes h_1 und des Punktes x^1 auf RH zufolge §§. 153 und 154, die Größe Rx^1 von R nach i^1 auf Rh_1 abzutragen; dadurch wird der Punkt i^1 und die Parallele $O^1i^1M^1$ zu OM bestimmt, die jede der Geraden Oh_1 in solchen Punkten i treffen wird, daß man $Ox = Oi$ erhält.

158. Da die Kurve der Punkte a sowohl für Figur 21 als für Figur 22 ein Hyperbelarm ist, dessen Mittelpunkt G und dessen Asymptote die Gerade ist, mit der sie zusammenfällt, wenn die Punkte H, E^1, R und h in einen einzigen Punkt mit G zusammentreffen, so wird dasselbe auch für die der Punkte x stattfinden, deren Asymptoten also leicht zu konstruieren sind. Man wird sich aber aus §. 151 erinnern, daß der zu betrachtende Theil der Kurve durch die Ausdehnung der fraglichen Fläche EF selbst begrenzt ist, so daß er also zwischen denjenigen Lagen von x enthalten ist, für die der Punkt des Bruches X mit den Enden E und F, und Xx mit den Parallelen zu bM zusammenfällt, die sie einschließen und deren Durchschnitte mit der Hyperbel der Punkte x, als zum Theil gezeichnet angenommen, diese Lagen erkennen laßen, die man überdies leicht durch ein direktes Verfahren erhalten könnte, das wir hier der Kürze wegen weglaßen.

Im allgemeinen, so wie in den meisten Fällen der Anwendung wird der der Seite EF zugehörige Theil der Hyperbel klein sein und beinahe mit einer Geraden zusammenfallen, es wird hinreichen, einige Punkte derselben mittelst des direkten Verfahrens §§. 142, 147 und 153 zu bestimmen. Dies erfordert (§. 152) die vorläufige Bestimmung des Punktes K für die verschiedenen Lagen des b auf BH.

159. Man konstruiere nun für jede dieser Seiten von HI (Figur 20) aus, wenn ihre Böschung kleiner ist (§. 135), als die der herabrollenden Erde, die Theile der entsprechenden Hyperbeln, welche durch die beiden Punkte x, die den äußersten Lagen von X auf diesen entsprechenden Seiten zugehören, begrenzt werden; dadurch erhält man eine unterbrochene Kurve oder ein krummliniges Polygon, welches durch die Ordinaten begrenzt wird, die den Endpunkten H und B der Wand BH entsprechen, und man kann sich also desselben

wie §§. 127 sqq. bedienen, um den Werth des Druckes und der Hebkraft in Bezug auf einen beliebigen Theil von *BH*, so wie der bezüglichen Momente und Hebelarme zu finden; mit ihrer Hülfe kann man dann die verschiedenen Aufgaben über die Stabilität der Mauern analog §§. **130** und **131** bestimmen.

Drittes Kapitel.

Anwendung der vorigen Theorie auf verschiedene Beispiele.

Um den Geist der vorigen allgemeinen Auflösungen beßer zu begreifen, wollen wir sie auf einige spezielle in der Praxis vorkommende Beispiele anwenden und dadurch ihre Nützlichkeit beweisen. Indessen wollen wir hier nur vorzüglich Aufgaben in Bezug auf den Druck betrachten, und in der dritten Sektion die wichtigsten Aufgaben, die durch die Hebkraft ihre Auflösung finden, behandeln.

160. Zuerst wollen wir die gewöhnlichen Halbbekleidungen (Figur 12) betrachten, die der Gegenstand der ganzen ersten Sektion und des ersten Kapitels dieser zweiten Sektion gewesen sind. Man wird erkennen, daß, anstatt die Abdachung des Aufwurfs durch eine mittlere Horizontale ersetzt anzunehmen, es eben so einfach ist, (§. **153** und **157**) direkt mit dieser beliebigen Abdachung zu operieren; um so mehr, da die Ueberhöhung nie so hoch über der Mauerkrone ist, noch ihre äußere Böschung *IE* so sanft, daß man (§. **135**) sich mit anderen Brüchen zu beschäftigen hätte, als mit denen, die der Ausdehnung der Abdachung *EF* selbst angehören.

Wenn die Böschung kleiner ist, als die der natürlichen Erde, wie bei Erdschanzen u. s. w., so erfolgt die Auflösung unmittelbar aus den bisher auseinandergesetzten allgemeinen Methoden; da aber hier Vereinfachungen eintreten, die denen für Erdfüllungen, die mit der Oberfläche der Mauer im Niveau sich befanden, analog sind, so wollen hier bei ihnen etwas verweilen und die Aufgabe mit der Allgemeinheit behandeln, die die Ausdehnung und Wichtigkeit ihrer praktischen Anwendungen erfordern.

Von den Erdaufwürfen, die durch eine Böschung begrenzt sind, welche geringer ist, als die natürliche Böschung der Erde.

161. Sei *BHE* (Figur 23 und 24) das Profil eines Erdaufwurfs, der durch die feste Wand *BH*, die die innere Mauerwand (nöthigenfalls über die Erdmasse verlängert) vorstellt, gehalten wird, und sei die Böschung *HE* kleiner als die der Erde, so kommt es darauf an, für einen beliebigen Punkt *b* von *BH* die Bruchlinie *bX*, die dem Prisma vom größten Druck (Figur 23) oder von der kleinsten Hebkraft (Figur 24) zukommt, so wie die entsprechenden Momente und Hebelarme zu finden.

Man braucht hier nicht die Transformation §. 150 vorzunehmen, da der Punkt *K* (Figur 20 und 22) mit *H*, *G*, *E* oder E^1 für jede Lage des *b* auf *BH*, zusammenfällt. Hat man also (Figur 23 und 24) für beide Fälle die Geraden mit konstanten Richtungen, *bM* und *bO* gezogen, wie dies §§. 140 und 147 angezeigt ist, so bestimme man die Lage von *X* auf *HE* und damit die Bruchlinie *bX*, indem man auf *OM*, für den Fall des Drucks (Figur 23) oder auf ihrer Verlängerung im Fall der Hebkraft (Figur 24), die mittlere Proportionale *OX* zwischen *OH* und *OM* abträgt; zieht man dann *Xx* parallel zu *bM*, so ergiebt sich auf *bO* der Punkt *x*, so wie man (ibid oder §. 153) zur Berechnung des Drucks oder der Hebkraft in Bezug auf die Ausdehnung *bH*

$$P \text{ oder } B = \tfrac{1}{2}p.\sin ObM.\overline{bx}^2 = \tfrac{1}{2}p.\cos\varepsilon^1.\overline{bx}^2$$

erhält, wo *P* und *B* immer die Richtung und ε^1 die Bezeichnung besitzen, die an jenen Orten angezeigt sind. Da ferner, wenn man *Hk* parallel zu *bM* zieht, sie *bO* in *k* trifft, so hat man auch $Ox = \sqrt{Ok.Ob}$, und es ergiebt sich wegen der Parallelität und der Proportionalität der Linien, welche zur Bestimmung der Punkte *x*, *X*, *k* und aller ihnen ähnlichen in Bezug auf verschiedene Lagen von *b* auf *BH*, dienen: 1) daß die Aufeinanderfolge der Punkte *x*, so wie die der Punkte *k* eine Gerade bildet, die nach *H* convergiert, 2) daß alle Bruchlinien *bX* mit einander und mit einer bestimmten Richtung parallel bleiben, so daß die Konstruktion eines einzigen Punktes *x* oder einer einzigen Linie *bX* hinreichen wird, um auf der Stelle alle die übrigen zu erhalten.

Diese Folgerungen ergeben sich auch unmittelbar daraus, daß die Punkte *R, G, K, E* und E^1 (Figur 21 und 22) des allgemeinen Falles, hier in einen eizigen mit dem Punkte *H* zusammenfallen; die Hyperbel der Punkte *x* fällt selbst (§. 158) mit ihren Asymptoten zusammen, deren eine also (Figur 23 und 24) durch *Hx*, und deren andere (§. 105 note) durch die Gerade *Hy* dargestellt ist, die alle Punkte *y* der Richtungen von *Ob* einschließt, die mit den Punkten *x* durch die Relation verbunden sind $Oy = Ox = \sqrt{Ok.Ob}$, so wie die Punkte *Y*, die ihnen auf der Richtung *HE* entsprechen mit den Punkten *X* in Folge der Relation $OY = OX = \sqrt{OH.OM}$ verbunden sind.

162. Aus dem vorigen ergiebt sich, daß hier wie bei den Füllungen in gleicher Höhe mit der Mauerkrone, der Druck und die Hebkraft proportional mit den Quadraten der Höhen der Stützoberflächen *bH* wachsen, und daß der Mittelpunkt des Druckes auf $\frac{1}{3}$ dieser Höhen vom Punkte *b* aus liegt, wodurch unmittelbar ihr Hebelarm und ihr Moment in Bezug auf einen beliebigen Umdrehungspunkt, wie z. B. *A* bestimmt wird, da wir (§. 140) die Winkel kennen, unter welchen die Kräfte *P* oder *B* gegen die Stützebene *bH* wirken.

Nimmt man daher die Fläche *HE*, welche die Füllung begrenzt, unendlich an oder doch groß genug damit der Punkt *X* nicht aus ihr heraustrete, was auch für eine Lage *b* auf *bH* annehmen möge, so sieht man, daß namentlich die Aufgaben sehr leicht zu lösen sind, mit denen wir uns §§. 130 und 131 beschäftigt haben, und die sich auf die Mauerstärken beziehen, die fähig sind, der Wirkung des Druckes zu widerstehen. Nimmt man im Gegentheil (Figur 25) an, daß *HE* durch eine obere Fläche *EF* begrenzt ist, so braucht man nur durch *E* eine Parallele Ex^1 zu *bM* zu ziehen, die die Verlängerung von *Hx* in x^1 trifft, dann durch x^1 eine Parallele zu *bO*, die *HB* in b^1 trifft, um die Grenze (§. 158) zu finden, die die Lage von *b* in Bezug auf die Böschung *HE* annehmen kann; dieser Grenze entspricht die Bruchlinie b^1E, deren Richtung parallel zu *bX*, eine andere Art der Bestimmung von b^1 und x^1 darbietet. Konstruiert man dann nach §. 153 die äußere Ordinate *BP* des Hyperbelarmes Px^1, welche der Oberfläche *EF* und dem tiefsten Punkte der Wand *BH* zukommt, so hat man alles zur Be-

stimmung der Intensität und des Momentes des Druckes auf diese Seitenwand.

Die Intensität (§. 153) ist gegeben durch den Ausdruck $\frac{1}{2}p.\sin OBM.\overline{BP}^2$ oder $\frac{1}{2}p.\cos\varepsilon^1.\overline{BP}^2$, sie, so wie das Moment rc. können nach dem Verfahren §§. 126 seqq. konstruiert werden. Um z. B. den Angriffspunkt U dieser Kraft zu finden, deren Richtung rechtwinklig (§. 140) auf die Gerade ist, welche mit der Wand BH und nach der Aussenseite der Füllung zu einem Winkel φ^1 bildet, der gleich ist dem der Reibung der Erde auf dem Mauerwerk, braucht man nach der Anmerkung zu §. 126 nur rechtwinklich auf BH die Ordinaten des Vierecks Fx^1HBP zu errichten und das Moment des neuen Vierecks in Bezug auf die Richtung BH genommen, durch $\frac{1}{2}\overline{BP}^2$ zu dividieren, so erhält man dadurch die verlangte Entfernung BU.

Für die Hebkraft verfährt man genau ebenso.

163. Um die Analogie zu vervollständigen, die zwischen einer horizontalen Füllung uud zwischen der gegenwärtigen (Figur 23 und 24) stattfindet, haben wir noch ein Wort über die Lagenverhältnisse zu sagen, die in diesem allgemeinen Falle zwischen den Geraden bH, bM, bO und bX oder den ihnen auf HE entsprechenden Punkten H, M, O und X bestehen. Um aber diese Relationen noch deutlicher hervortreten zu laßen, wollen wir zugleich (§. 161) sowohl den Punkt X oder die wirkliche Bruchlinie bX als auch den Punkt Y, oder die erdichtete Bruchlinie bY betrachten, die mit ihnen genau verbunden sind, obgleich sie sehr verschiedenen Fragen angehören; denn bY und $\frac{1}{2}p.\sin ObM.\overline{by}^2$ stellen für Figur 23 z. B. die Bruchlinie und die Hebkraft in Bezug auf die Erdmasse BHY vor, die durch die Verlängerung von HC nach außen hin begrenzt wird; das Verhältnis dieser Hebkraft zum Drucke des anliegenden Erdkörpers ist durch das von $\overline{by}^2$ zu $\overline{bx}^2$ gegeben. *)

---

*) Sucht man direkt analytisch oder geometrisch nach der Anmerkung am Ende dieses Werkes, die Richtung der Ebene BH, welche diesem Verhältnis seinen kleinsten Werth für alle Lagen von b auf dieser Ebene, und folglich auch für alle Elemente der entsprechenden Oberfläche, giebt, so findet man, daß der Winkel BHO gleich sein muß dem Komplement der Hälfte des Ueberschußes von $ObH = \varphi + \varphi^1$ über $OHk = OMb = \varphi - \beta$, d. h. gleich $90^0 - \frac{1}{2}(\varphi^1 + \beta)$; das Max entspricht $\frac{1}{2}(\varphi^1 + \beta)$ oder einer rechtwinklichen Richtung. Hieraus laßen sich übrigens leicht mehre Folgerungen

Wir wollen jetzt annehmen, man habe (Figur **23** und **24**) den Halbkreis gezeichnet, dessen Durchmeßer *HM* und dessen Mittelpunkt *C* ist, und daß man vom Punkte *O* aus an ihn die Tagente *OT* gezogen habe; dann nehme man sie als Halbmeßer eines neuen Kreises, beschrieben aus dem Punkte *O*, als Mittelpunkt, so wird er offenbar (§. 161) durch *X* und *Y* gehen und schneidet den ersten rechtwinklich in *T*, so daß der Winkel *OTC* der reziproken Tangenten *OT* und *TC* an die entsprechenden Kreise, so wie auch der Winkel *YTX* ein rechter sein wird. Dies vorausgesetzt, folgt aus Sätzen der elementaren Geometrie *)

1) daß die Distanz *HM*, nach innen oder nach außen in Theile getheilt sein wird, die den Punkten *X* und *Y* direkt oder harmonisch proportional sind; ebenso auch die Entfernung *XY* proportional den Punkten *H* und *M*.

2) Daß, wenn man von einem beliebigen Punkte *Z* des Kreises aus, der *XY* zum Durchmeßer oder *OT* zum Halbmeßer hat, die Geraden *ZH* und *ZM* nach den Punkten *H* und *M* und die Geraden *ZX* und *ZY* nach den Punkten *X* und *Y* zieht, die Paare von Segmenten *XH* und *XM*, *YH* und *YM*, welche auf der Basis *HM* des Dreiecks *HMZ*, oder auf deren Verlängerung gebildet sind, gleichfalls proportional sein werden den anliegenden Seiten *HH* und *MZ* dieses Dreiecks.

3) Daß endlich der Winkel *HZM*, der der Basis *HM* gegenüberliegt, so wie sein Supplement, durch die respektiven Geraden *ZX* und *ZY*, die sich unter rechtem Winkel schneiden, in zwei gleiche Theile getheilt wird.

164. Wir wollen namentlich den Fall betrachten, wo die Linie *HE* des Erdprofils horizontal ist, und wo man zugleich die Reibung auf *BH* vernachläßigt, d. h. wo man (§§. 138 und 139) f_2 oder $\varphi^1 = o$ setzt; hier werden die Winkel *bMO* und *ObH*

---

in Bezug auf die Herstellung der Erdfüllung ziehen; es genügt aber für unsern Zweck, zu bemerken daß in dem Falle, wo die Masse *BHY* besteht, da die Ebene *BH* nur fingiert ist, $\varphi^1 = o$ (149) sei, und daß, wenn überdies die Grenze *YE* der Erde horizontal ist, so daß $\beta = o$, der Winkel *ObH* des *Minimums* ein rechter sein wird, oder daß die entsprechende Richtung *BH* vertikal ist.

*) Géométrie de Legendre liv. III propos XVI et XXXIV.

beide dem Winkel φ der natürlichen Böschung der Erde mit dem Horizonte gleich, und es wird folglich die Gerade bO Tangente in b sein an den um bHM beschriebenen Kreis; ihre Länge ist daher $Ob=\sqrt{OH.OM}=OT$ und der Punkt b kommt auf den Kreis zu liegen, auf dem sich schon x und y befinden und der aus O als Mittelpunkt mit Ob als Halbmeßer beschrieben ist. Für den besondern Fall, den wir gegenwärtig betrachten und der speziell **Prony** und **Français** in der Annahme des Drucks beschäftigt hat, theilen die Bruchlinien, die wirkliche bX und die fingierte bY, den Winkel HbM (der durch die natürliche Böschung der Erde und die Richtung der Stützwand BH gebildet wird), und sein Supplement, in zwei gleiche Theile (**163**). Dieser Satz, der hier auch auf die Hebkraft ausgedehnt ist, findet offenbar nicht mehr Statt, wenn HE eine Böschung besitzt, selbst wenn man auch die Reibung gegen die feste Ebene BH vernachläßigte.

165. Da für diese allgemeine Annahme das Paar von Punkten x und y, die die schiefwinkligen Projektionen der Punkte des Bruches X und Y auf die Richtung bO sind, in Bezug auf das Paar von Punkten k und b, die die parallelen Projektionen von H und M sind, durchaus dieselbe Rolle spielen, wie die, aus denen sie hergeleitet sind, so folgt daraus, daß, wenn man von einem beliebigen Punkte z des Kreises aus, der über xy als Durchmeßer und aus O als Mittelpunkt beschrieben ist, gerade Linien an diese entsprechenden Paare: x und y, b und k legt, der Winkel kzb dieser letzten und sein Supplement durch die Geraden des andern Paares in gleiche Theile getheilt sein werden.

In dem besondern Falle des vorigen §. ist die Entfernung $OH=Ox$ (§§. **126** und **153**); dies folgt auch direkt daraus, daß der Kreis, welcher dann b, H und k enthielte, in H die Gerade OH berühren würde, weil Winkel $OHk=ObH=\varphi$; es gehört daher der Punkt H gleichfalls dem obigen Kreise, über xy als Durchmeßer beschrieben, an und folglich theilen die Linien Hx, Hy, die die beiden Reihen von Punkten x, y (§. **161**) enthalten, und die sich rechtwinklich durchschneiden, den Winkel $bHk=HbM$ oder sein Supplement in zwei gleiche Theile; es sind daher endlich diese Linien respektiv den Bruchlinien bX und bY parallel. Dieser Fall ist um so bemerkenswerther, als er in dem allgemeinen Falle, wo

HE nicht mehr horizontal ist, und *HX* und *HY* den Winkel *HbM* oder sein Supplement nicht mehr in gleiche Theile theilen, auch stattfindet.

Denn da man namentlich für den Punkt *x*

$$\overline{Ox}^2 = Ok.Ob \text{ oder } Ox:Ok = Ob:Ox$$

hat und da überdies das Verhältnis von *Ox* zu *Ok* nach den Bedingungen der Aufgabe (§. 161) gleich ist dem von *OX* zu *OH*: so folgt daraus unmittelbar, daß diese letztern Entfernungen selbst dem *Ob* und *Ox* proportional sind und folglich, daß *Hx* parallel zu *bx* ist u. s. w.

Diese verschiedenen Sätze führen zu einer merkwürdigen Vergleichung zwischen den Ausdrücken für den Druck und die Hebkraft der Erde im gegenwärtigen Falle, sie finden sich in der Anmerkung hinter diesem Werke.

Fremdartige Belastungen, die einen gleichmäßigen oder konstanten Druck ausüben.

166. Zuweilen muß man in der Praxis die Wirkungen untersuchen, welche fremdartige Belastungen hervorbringen, wie z. B. die von Mauerwerk, dessen vertikaler Druck sich nach einem a priori gegebenen Gesetze über die ganze Ausdehnung, — oder auf einen Theil derselben, der durch die obere Oberfläche des Aufwurfes begrenzt wird — vertheilt. Prony, Navier und vorher Coulomb haben den Einfluß solcher Belastungen auf die Bedingnngen des Gleichgewichtes der Erdbekleidungen untersucht; allein die dabei gemachten Bedingungen sind für die Anwendungen zu beschränkt, die hier beabsichtigt werden.

Wir wollen wieder eine Erdmasse betrachten, die durch eine Ebene *BG* gestützt, und oben durch eine ebene Fläche *GEF* (Figur 26 und 27) von größerer oder geringerer Böschung begrenzt wird; dieselbe sei in ihrer ganzen Ausdehnung Pressungen unterworfen, die nach den gewöhnlichen Annahmen vertikal, konstant oder gleichmäßig vertheilt sein mögen; es wird nach den Veränderungen gefragt, welche dieser Umstand in die Bedingungen des Gleichgewichtes für das Prisma *bGX* rücksichtlich des Druckes *P* (Figur 26)

oder der Hebkraft B (Figur 27) auf die schräge Seitenwand bG einer Mauer herbeiführen wird?

167. Um diese Frage zu beantworten, wollen wir die fraglichen Pressungen als durch die Gewichte von gleich hohen vertikalen Erdschichten, die von einander unabhängig sind, und über die Fläche GF hervorragen, entstanden annehmen, so daß für jede gegebene Länge von GX der Totaldruck durch das Gewicht eines vertikalen schiefen Prismas GXX^1G^1 dargestellt wird, das dieselbe Dichtigkeit p, wie die der fraglichen Masse, besitzt und von der zu GF parallelen Ebene G^1F^1 so wie von den Vertikalen GG^1, XX^1, deren Höhe immer leicht zu bestimmen sein wird, begrenzt ist.

Nennt man diese Höhe $=a$, den Winkel G^1GF, oder $X'XF^1$, der durch die Richtung von GF mit der Vertikallinie gebildet wird, $=\gamma$ und berücksichtigt man die Betrachtungen des §. **140** rc., so leuchtet ein, daß die Oberfläche $\frac{1}{2}bT.GX$ des Profils vom hypothetischen Bruchprisma bGX, in den auf unsern Fall sich beziehenden Ausdrücken von F und F^1, nur um die Größe $a.\sin\gamma.GX$ vermehrt zu werden braucht. Da ferner die Normale bT auf die Richtung GF für alle Prismen bGX konstant ist, die ihren Scheitel in demselben Punkte b nnd ihre Grundlinien auf GF haben, so sieht man, daß die Lage der Bruchlinie bX für die neue Annahme dieselbe bleiben wird, und daß man nur die Hebkraft oder den Druck auf das Prisma bGX, das §. **161** allein angenommen wurde, in dem Verhältnisse von bT zu $bT+2a\sin\gamma$ zu vermehren braucht; dies giebt, wenn man die Bezeichnungen und Annahmen §§. **142** und **146** beibehält:

$$P \text{ oder } B=\tfrac{1}{2}p.\sin ObM\left(1+\frac{2a\sin\gamma}{bT}\right)\overline{bx}^2$$

$$=\tfrac{1}{2}p.\sin ObM.\overline{bx}^2+p.\sin ObM.a\sin\gamma,\frac{\overline{bx}^2}{bT},$$

für den Werth dieser Kräfte, deren Richtung übrigens normal (§. **140**) auf die der Geraden ba^1, bleibt, welche letztere mit der Seitenwand BG außen am Aufwurfe für den Druck (Figur **26**) oder innerhalb für die Hebkraft (Figur **27**) einen Winkel φ^1 bilden, der gleich ist dem der Erde mit dem Mauerwerke.

168. Dieser nämliche Werth setzt sich also aus zwei andern

zusammen, deren einer genau derjenige ist, der stattfinden würde, wenn keine Belastung vorhanden wäre, und deren anderer sich nur auf diese Belastung bezieht und durch ähnliche Verfahrungsarten konstruiert werden könnte.

Sei bz die Vertikale von b, die sich in GF endigt, so hat man

$$bT = bz.\sin\gamma \text{ und } a\sin\gamma\frac{\overline{bx}^2}{bT} = a\frac{\overline{bx}^2}{bz} = \frac{\overline{b^1G}}{bG}\overline{bx}^2,$$

da b^1 der Durchschnittspunkt der Verlängerungen von bG und F^1G^1, und das Dreieck b^1GG^1 ähnlich dem Dreieck bGz ist.

Ferner hat man, da die Aufeinanderfolge der Punkte x hier (§. 161) auf einer durch G gehenden Geraden liegt, in dem Dreiecke bGx, wenn k ein unveränderliches Verhältnis bedeutet,

$$bx = bG\frac{\sin bGx}{\sin bxG} = k.bG \text{ und}$$

$$a\sin\gamma\frac{\overline{bx}^2}{bT} = k^2.b^1G.bG$$

Hieraus folgt, daß die Seitenkraft von P oder B in Bezug auf die gleichförmige Belastung, proportional mit der Ausdehnung der gedrückten Oberfläche wächst, und daß folglich ihr Angriffspunkt auf der Mitte von bG anstatt auf $\frac{1}{3}$ von b aus, wie (§. 162) für die andere Seitenkraft, liegt. Hieraus ergiebt sich leicht, daß der allgemeine Angriffspunkt U der Kraft

$$P \text{ oder } B = \tfrac{1}{2}p.\sin ObM\left(1 + \frac{2b^1G}{bG}\right)\overline{bx}^2$$

auf der Geraden bG liegt und zwar von b entfernt um

$$bU = \tfrac{1}{3}bG\frac{bG + 3b^1G}{bG + 2b^1G};$$

die Kraft selbst hat die schon am Ende des vorigen §. angezeigte Richtung.

169. Der Werth von bU ist immer leicht zu berechnen oder zu konstruieren; für P oder B nehme man auf der Verlängerung von Gb, bt die dritte Proportionale zu bx, und bG indem man auf der Normale von b auf $BG, bx^1 = bx$ abträgt, und dann x^1t rechtwinklich auf Gx^1 errichtet; dann ist

$$P \text{ oder } B = \tfrac{1}{2} p . \sin ObM (bG + 2b^1G) bt,$$

welcher Ausdruck sich folglich auf die gewöhnliche Form (142 und 146) reduzieren würde, wenn man durch eine einfache Konstruktion auf bx^1 die Linie bu als mittlere Proportionale zwischen bt und $bb^1 + b^1G$ nähme. Allein es ist bei den Aufgaben (§. 126 ꝛc.) in Bezug auf das Gleichgewicht der auf bG wirkenden Kräfte noch einfacher, bu gleich der 4ten Proportionale zwischen bt, $bb^1 + b^1G$ und der willkührlichen Entfernung zu nehmen, durch welche man (§. 130) die Gleichung dividiert, welche die Bedingungen dieses Gleichgewichtes ausdrückt.

170. Sehr leicht laßen sich diese Untersuchungen auf ein Erdprofil wie $BHEF \ldots$ (Figur 26 und 27) ausdehnen, das gleichmäßig auf allen Flächen durch eine Erdmasse von der Höhe $HH^1 = EE^1$ u. s. w. gedrückt oder belastet wird. Denn nach bekannten geometrischen Prinzipien kann man immer die Polygonalfigur bHH^1E^1Eb, die für jeden Punkt b bestimmt ist, in eine andere bKK^1E^1Eb umändern, die dieselbe Oberfläche besitzt und von einem Dreiecke KbE, dessen Scheitel K auf GF liegt, und von einem Parallelogramme KK^1E^1E, dessen Grundlinie KE mit der des Dreiecks zusammenfällt, gebildet wird; hierdurch (§. 140 und §. 151) wird diese Frage auf den ersten Theil der vorigen (§. 167) zurückgeführt, vorausgesetzt, daß der Punkt K, der jetzt an die Stelle von G tritt, mit b sich verändert, und daß die Aufeinanderfolge der Punkte x dann (§. 156) dem einem Arme einer Hyperbel angehört u. s. w. Konstruiert man also den Durchschnitt b^1 der Verlängerungen von BH und F^1E^1, so hat man

$$P \text{ oder } B = \tfrac{1}{2} p . \sin ObM \left(1 + \frac{2b^1G}{bG}\right) \overline{bx}^2.$$

Nur der Angriffspunkt dieser Kraft oder ihr Moment muß nach dem allgemeinen Verfahren §§. 126 ꝛc., konstruiert werden. Wir wollen hier jedoch nicht weiter bei diesem allgemeinen Falle verweilen, da er zu wenig Interesse darbietet.

171. Dahingegen würde es sehr nützlich sein, wenn man auf eine eben so einfache Weise viele andere Aufgaben in Bezug auf den außerhalb des Mittels wirkenden Druck, in Bezug auf überschwemmte Gegenden u. s. w. behandeln könnte, da sie besonders die

Stabilität der Fundamente interessieren, wie dies der folgende Abschnitt lehren wird. Alle diese Aufgaben führen neue Schwierigkeiten mit sich und erfordern eine besondere Behandlung, mit der wir uns hier nicht beschäftigen können.

Wir wollen jedoch in Bezug auf den atmosphärischen Druck bemerken, daß derselbe bei solchen Erden, wie z. B. der Thon ist, ähnlich wirken muß, wie die Kohäsion selbst, daß er nämlich die Reibungen auf den Stütz- oder Bruch-Oberflächen, proportional mit ihrer Größe vermehrt. In Bezug auf die überschwemmten Erden kann man ohne bedeutenden Fehler annehmen, daß der Druck auf diese nämlichen Oberflächen sich in zwei andere zerlegt, deren einer demjenigen gleich ist, der stattfinden würde, wenn kein Erdaufwurf vorhanden wäre und der sich also nach der gewöhnlichen Methode berechnen läßt; und deren anderer gleich ist dem Druck oder der Hebkraft einer, der Erde ähnlichen, Masse, deren Dichtigkeit aber dem Ueberschuße der Dichtigkeit der Erde über die der sie umgebenden Flüßigkeit gleichkommt.

Erdbekleidungen mit einem Rundenwege oder Erdaufwürfe in Form von Kavalieren (Katzen).

172. Da dieser Fall häufig vorkommt und einige Schwierigkeiten in der Anwendung darbietet, so haben wir geglaubt, ihn besonders betrachten zu müßen.

ABCD (Figur 28, 29 und 30) ist das Profil einer Mauer, die die Erdmasse *BHEFI....* mit dem einspringenden Winkel in *E* tragen soll; es soll die Stärke und das Moment des Druckes auf *BH* gefunden werden; diese Daten interessieren uns hier allein, da man daraus nach Kapitel I. dieses Abschnittes allgemein die Stärke *AB* der Mauerbasis bestimmen kann.

Zuerst ziehe man durch den Punkt *B* die Linie *BM* parallel zur natürlichen Böschung der Erde und die Gerade *BO* außerhalb des Aufwurfes, so daß sie mit der Seitenwand *BH* den Winkel *OBH* bildet, welcher gleich ist der Summe der Winkel φ und φ^1 der Reibung der Erde auf einander und mit dem Mauerwerke, wenn anders man auf diese letzte Reibung Rücksicht nehmen will. Hierauf kann man sogleich (§. 143) entscheiden, ob die Bruchlinie *BX* des

Prismas vom größten Drucke der obern Oberfläche *FI* des Erdaufwurfes zukommt, oder nicht.

Um sich davon noch mehr zu versichern, seien *O* und *M* in dem gegenwärtigen Falle, die Durchschnittspunkte der Geraden *BO* und *BM* mit der Richtung dieser Oberfläche, und *K* ein bestimmter Punkt (§. 152) auf dieser nämlichen Richtung, so braucht man zufolge der Bedingung, daß das Dreieck *BFK* gleich sei dem Viereck *BFEHB**) nur auf *OM* die Linie $OX = \sqrt{\overline{OK.OM}}$ zu machen, indem dadurch der Punkt des Bruches *X* sich ergiebt; derselbe muß zwischen *F* und *I*, wie Figur 28 und 30, fallen. In diesem Falle hat man, wenn *P* dessen Projektion auf der Linie *BO*, die parallel zu *BM* gezogen ist, vorstellt, für den Druck auf *BH* den Ausdruck

$$P = \tfrac{1}{2}p \,.\, \sin OBM \,.\, \overline{BP}^2 \text{ (§. 142).}$$

Für die Behandlung der Aufgabe (§. 131) in Bezug auf das Gleiten des Mauerwerks ist nun alles vorhanden; in Bezug auf den Umsturz muß man jedoch noch das Moment des Druckes bestimmen, was in §. 176 geschehen soll.

Fällt aber der so erhaltene Punkt *X* diesseits *F* in Bezug auf *I* (Figur 29) so wird dadurch angezeigt, daß das Prisma vom größten Drucke der einen der vorigen Oberflächen zukommt; alsdann müßen mehre Fälle unterschieden werden, je nachdem die Böschung von *EF* gleich ist der der herabrollenden Erde, oder je nachdem sie sanfter oder steiler ist.

173. Für den ersten Fall weiß man (§. 145), daß der Bruch in keinem der Punkte von *EF* eintreten könne und daß er daher zwischen *H* und *E* stattfinden müße; da dasselbe à fortiori für alle Bruchprismen sich ereignen muß, für die der Punkt *B* höher auf *BH* hinaufrückt, wie z. B. für den Punkt *b*, so hat folglich die Belastung *EFI*.... keinen Einfluß und die Aufgabe reduziert sich auf die §§. 161 folg. Hat man daher *HE* bis an ihre Durchschnittspunkte O^1 und M^1 mit *BO* und *BM* verlängert und auf

---

*) Diese Konstruktion ist in den Figuren 28, 29 und 30 angezeigt und zwar mittelst der Linie EH^1 und H^1K, die den Geraden *FH* und *FB* respektive parallel sind; H^1 gehört der Linie *BH* an.

ihrer Richtung den neuen Punkt des Bruches X^1 durch die Bedingung

$$\overline{O^1X^1}^2 = O^1H . O^1M^1$$

bestimmt, so braucht man nur noch diesen Punkt nach P^1 auf BO durch eine Parallele zu BM zu projizieren um den Werth des Druckes auf BH

$$P = \tfrac{1}{2}p \sin ObM . \overline{BP^1}^2$$

zu erhalten, dessen Angriffspunkt hier auf $\frac{1}{3}BH$ von B aus liegt (§. 162), und dessen Richtung normal (§. 140) ist auf derjenigen Geraden, die außerhalb der Seitenwand BH liegt und mit der Richtung der Reibung der Erde auf dieser Seitenwand einen Winkel φ^1 bildet.

174. Für den zweiten Fall (Figur 29), wo die Böschung von EF sanfter ist als die der Erde, suche man, auf die bereits angezeigte Art, in Bezug auf die Fläche FI den Punkt des Bruches X'' rücksichtlich dieser Böschung. Im allgemeinen ist es hier einfacher (§§. 151 und 152), erst die Durchschnittspunkte O'' und K'' der Richtung EF mit der Geraden BO und der durch H gehenden Parallele zu BE zu bestimmen, dann K'' nach k'' auf dieser Gerade zu projizieren und darauf

$$O''P'' = \sqrt{\overline{O''k''} . \overline{O''B}}$$

zu nehmen; dadurch ergiebt sich P'', dann mittelst der Parallele $P''X''$ zu BM (§. 142) der verlangte Punkt X'' und endlich der Druck auf BH

$$P = \tfrac{1}{2}p \sin OBM . \overline{BP''}^2.$$

Der Angriffspunkt dieses Druckes läßt sich nach dem §. 162 angezeigten Verfahren finden; man konstruiere zuerst den Theil der Geraden He rücksichtlich der Fläche EH des Aufwurfs, die zu BX^1 parallel ist, und deren Verlängerung durch P^1 geht; dann den Theil der Hyperbel $P''e$ rücksichtlich der Ausdehnung von EX'' auf EF, deren Endpunkt e mit dem der Linie He zusammenfällt und entweder durch die Parallele Ee zu BM oder durch das System von Parallelen Eb, be zu BX^1 und BO, die sich auf BH schneiden, gegeben ist, u. s. w.

Wenn übrigens der Punkt X'' unterhalb E zu liegen kommen

sollte, so ist dies ein Zeichen, daß der Bruch nur in der Linie HE eintreten kann; dann kommt die Auflösung auf die des vorigen Falles zurück.

175. Wenn endlich die Böschung von EF steiler ist, als die der herabrollenden Erde, so kann der Bruch nicht in ihr geschehen (§. 145), er kann dann nur in der Fläche HE, wie im ersten Falle, Statt finden; da aber alsdann (§. 119) am Fußpunkte von EF ein endlicher Druck entsteht, der sich mit dem natürlichen Druck in Bezug auf die Bruchprismen, welche HE angehören, verbindet, so wird die Aufgabe weit verwickelter und muß man die Art der Fortpflanzung des erstern Druckes durch die Erdmasse betrachten; hiervon ein mehres bei dem Abschnitte von den Fundamenten.

In dem gewöhnlichen Falle, wo die Kavaliers niedrig und unbekleidet sind, und wo folglich die Böschung EF sich nicht merklich von der der herabrollenden Erde entfernen kann, ist die Aufgabe unwichtig; sie wird aber wichtig, wenn die entgegengesetzten Umstände eintreten, wie dies Vauban auch recht gut gefühlt hat.

176. Die vorige Untersuchung bezieht sich übrigens nur auf den Fall, wo die Masse $EFI\ldots.$ (Figur 29) weit genug von der Mauer $ABCD$ entfernt liegt, so daß der Bruch nicht in der Fläche FI stattfinden kann; wenn dies aber zufolge der ersten Annahme (§. 172, Figur 28) nicht der Fall ist, so muß man den auf diese Fläche sich beziehenden Hyperbelarm (§. 158) betrachten, der einentheils von dem Punkte f (ibid) — der durch die, durch den Punkt F gehende, Parallele zu BM bestimmt wird — begrenzt wird. Alsdann hat die Auffindung des Momentes vom Drucke P auf BH

$$P = \tfrac{1}{2}p \, . \sin OBM \, . \overline{BP}^2$$

keine Schwierigkeit mehr, da der obere Theil der Linie $PfeH$ in Bezug auf verschiedene Lagen des b auf BH (§. 159), wie in den vorigen §§. konstruiert wird.

177. Das zusammengesetzte dieser Untersuchung liegt in der Verschiedenheit und Allgemeinheit der angenommenen Hypothesen. Für spezielle Fälle ist sie kurz und leicht und läßt zweckmäßige Vereinfachungen zu.

Für den gewöhnlichen Fall der Anwendung, bei den man die Reibung auf der Seitenwand BH der vertikal angenommenen Mauer

vernachläßigt, und bei dem (Figur 30) $OBM=90^o$, $O^1X^1=O^1B$, $O^1P^1=O^1H$ ist, zeigt diese Figur, daß der Druck auf BH und sein Moment nur von sehr einfachen Konstruktionen abhängen, da He, deren Verlängerung durch P^1 geht, durch die Verlängerung der natürlichen Böschung FE selbst begrenzt ist; da ferner ef (Figur 28) verschwindet und da endlich der Hyperbelarm Pe (Figur 30), in Bezug auf die Fläche FI, als mit einer Geraden zusammenfallend angesehen werden kann, deren Endpunkt P, nach §. 172 konstruiert, den Druck

$$P=\tfrac{1}{2}p.\overline{BP}^2$$

giebt, der hier normal auf BH ist, und dessen Angriffspunkt U nach §. 162 erhalten wird, während die Stärke der Mauer selbst nach §§. 110 und 111 gefunden wird.

178. Aus dem vorigen (§. 173) ergiebt sich überdies, daß, wenn man bei den nämlichen Annahmen den Fußpunkt E der Belastungsmasse um die Distanz HE — welche gleich oder größer ist als die Größe $HX^1=BH.tgHBX^1$, oder $Htg\tfrac{1}{2}\alpha$ (§§. 6 und 164) von der Mauer verlegte, diese Masse keinen Einfluß mehr ausüben würde, und man die Dicke AB nach den gewöhnlichen Regeln berechnen müßte.

Ich wiederhole (§§. 64 und 134) hier nochmals, daß Vauban sich durch Betrachtungen dieser Art bei der Aufstellung der ökonomischen Profile wahrscheinlich hat leiten laßen. Die Figuren 36 und 37 Pl. IV. bieten um so bemerkenswerthere Beispiele dar, als er bei der geringen Breite von 5½ Fuß die er HE (Figur 30) gab, hier die Stärke an dem Mauerbande hat auf 5 Fuß reduzieren können, die er bei andern Lokalitäten, namentlich zu Furnes, zu 6½ Fuß hat annehmen müßen, indem er dem Erd-Kavalier 18 Fuß Höhe gab.

Von den Profilen des Mauerwerkes, das die Endpunkte der prismatischen Erdfüllungen trägt.

179. Die bisherigen Aufgaben setzen bei den Prismen des Mauerwerkes und der Erdfüllung eine unbestimmte Länge und einen nahe konstanten Querschnitt voraus, ohne auf die Seitenreibung und die Kohäsion Rücksicht zu nehmen, welche die Endpunkte halten; in

der That muß man auch bei dieser Art von Aufgaben davon abstrahieren. Wenn die Ausladung, das Profil und die Richtung einer Seite des Baues sich stetig oder allmählig verändern, so ist es hinreichend, wenn man nach den gewöhnlichen Methoden die Dicken des Mauerwerkes für vertikale Schnitte sucht, die man in passende Entfernungen vertheilt, und diese Dicken dann für diejenigen der Erdbekleidung an den entsprechenden Punkten annimmt. Diese Methode läßt sich jedoch nicht mit der wünschenswerthen Einfachheit und Genauigkeit ausführen, wenn der Erdaufwurf plötzliche Veränderungen erleidet, wie dies im allgemeinen bei den Mauerprofilen Statt hat, welche sich am Ende von Traversen und langen Armen von Werken befinden, die eine größere oder geringere Ausladung haben. Dann ist es beßer, eine reduzierte oder gleichförmige Stärke für diese Theile zu berechnen, deren Gleichgewicht unabhängig von der Mauerverstärkung bestehen muß, und zwar nach einer direkten Methode, die, obgleich etwas lang, den Vortheil darbietet, daß sie nur, selbst im allgemeinsten Falle, die Auflösung einer Gleichung des zweiten Grades erfordert.

180. Figur **31** stellt den Längsschnitt einer Traverse von Erde oder des Endes von einer langen Façe dar, die durch das Mauerprofil $ABCIFEA$ gehalten wird. Der obere Theil $IDEF$ des letztern wird gewöhnlich nicht so stark gemacht wie die Hauptmasse $ABCD$ und kann durchaus nach denselben Methoden berechnet werden. Der Einfachheit wegen nehme man die Basis AB und die Linien CI, FE, so wie alle ihnen ähnlichen, parallel den Kanten FM des Füllungsprismas an; denn hierdurch können die Resultate nur unmerklich verändert werden. Durch den Umfang $ADFGHNA^1A$ (Figur **32**) möge endlich der Querschnitt dargestellt sein, den man durch eine Ebene AT'' oder BT'' (Figur **31**) — welche die Kante A oder B der Mauerbasis enthält — normal auf dieselben, verlängert angenommenen, Kanten erhält.

Dies vorausgesetzt, betrachte man besonders den Druck, der auf einen beliebigen Theil bK der innern Seitenwand BC durch das Erdtheil bKX, das durch die hypothetische Bruchebene bX begrenzt ist, ausgeübt wird; alsdann sieht man, daß alle Raisonnements §§. **139** folg. auf den gegenwärtigen Fall anzuwenden sind, ausgenommen auf den geometrischen Ausdruck des Gewichtes Q und

des Volumens des Theiles bKX, dessen Werth leicht berechnet werden kann, wenn man seine Kanten bis an die Ebene bT, parallel zu BT'' oder AT''', verlängert denkt. Denn bezeichnet man durch S die Fläche des Queerschnitts in Bezug auf diese Ebene, die durch die Horizontale des Punktes b begrenzt ist, und also durch den Umfang $aDFGHNna$ (Figur 32) bestimmt ist, wenn an die Horizontale vorstellt. Seien ferner g, g' und g'' die Projektionen der Punkte, wo die respektiven Ebenen bT, bK und bX diejenige Gerade treffen, welche die Schwerpunkte der entsprechenden Queerschnitte der Erdausfüllung, die gleichfalls durch die Horizontale des Punktes b begrenzt werden, verbindet, so wird nach Prinzipien der Geometrie und der Mechanik das Volumen des Theiles bKX durch das Produkt $S.g'g''$ ausgedrückt. Bezeichnen daher T, K und X beziehungsweise die Durchschnitte der Ebenen bT, bK und bX mit der Kante ME der Erdfüllung, welche in der Ebene der Figur 31 und normal (ebenso wie gg'') auf bT oder BT'' liegt, so wird der Ausdruck §. 140 der Kraft F', welche sich dem Herabsinken des Theiles KbX entgegensetzt, hier durch den folgenden ersetzt:

$$F = \tfrac{1}{2}p.S.g'g''.\frac{bx}{Xx};$$

wenn alle andere Bezeichnungen und Uebereinkünfte dieses §. und der vorigen beibehalten sind, ferner die Geraden bM und bO, oder ihre Parallelen BM^1 und bO^1 immer mit dem Horizonte und der innern Seitenwand BK der Mauer die dort angezeigten Winkel bilden, und wenn endlich Xx eine Parallele zur Richtung bM oder BM^1 der natürlichen Böschung der Erde ist.

Andererseits hat man augenscheinlich:

$$\frac{g'g''}{KX} = \frac{bg^1}{bK} = \frac{bg}{bT},$$

wodurch man endlich, wenn

$$S = C.\overline{bT}^2$$

gesetzt wird, erhält:

$$F^1 = \tfrac{1}{2}p.S.\frac{bg}{bT}.KX.\frac{bx}{Xx} = \tfrac{1}{2}p.C.bg.bT.KX.\frac{bx}{Xx}.$$

181. Bis auf den numerischen Faktor C, der nur mit der

Lage des Punktes b sich verändert, ist demnach die Aufsuchung der Bruchebene oder Bruchlinie bX vom größten Drucke, dieselbe (§. 140) wie für den Fall Figur 17 und 18, wo die Erdausfüllung ein konstantes Profil hat. Man braucht daher in dem, durch Figur 31 angezeigten, Sinne nur auf der unbegrenzten Kante EM der Erdfüllung, die bO und bM respektive in O und M schneidet, OX als mittlere Proportionale zwischen OK und OM zu nehmen, um die entsprechende Lage von X, und mittelst der Parallele Xx zu bM, ihre Projektion x auf bO zu erhalten, wohin man noch direkter gelangt (§. 142), wenn man nach der Projektion des Punktes K nach k, die auf dieselbe Weise geschieht,

$$Ox = \sqrt{\overline{Ob.Ok}}$$

nimmt. Man erhält demnach auch zur Berechnung des größten Druckes, dessen Richtung übrigens nur dann auf der Seitenwand BK normal ist, wenn man (§. 140) die Reibung der letztern gegen die Erde vernachläßigt, die Formel:

$$P = \tfrac{1}{2}p.C.bg.\sin ObM.\overline{bx}^2 = \tfrac{1}{2}p.\sin ObM.S.bg\frac{\overline{bx}^2}{\overline{bT}^2};$$

in welcher $S.bg$ das Moment der Fläche $aDF\ldots Nna$ (Figur 32) in Bezug auf die Horizontale an bezeichnet.

182. Kennt man den Punkt x und die andere Daten der Figur, so läßt sich auch der Werth des Druckes auf eine beliebige Ausdehnung bK der innern Mauerwand berechnen, und selbst konstruieren, da sich der Schwerpunkt einer ebenen Fläche auf sehr einfache Weise bestimmen läßt. Wiederholt man z. B. die Operationen für den untern Punkt B der Seitenwand und für die ihm entsprechenden Parallelen BO' und BM' zu bO und bM, so werden sie, angenommen, daß der Punkt P auf BO liegt, für die Auffindung des x, den Druck auf die ganze Höhe der Mauer erkennen laßen.

Da aber die Entfernungen bT, bx und bg so wie die Fläche S mit der Lage des Punktes b auf BK sich verändern, so ist diejenige Formel, in der sie vorkommen, wenig geeignet zur Auffindung des Momentes von diesem Drucke; wir wollen sie daher in eine andere transformieren, die eine möglichst geringe Anzahl der Veränderlichen enthält.

Da die Aufeinanderfolge der Punkte x, die verschiedenen Lagen des b auf BK entsprechen, auch hier noch (§. 161) einer Geraden zukommt, die durch die Punkte K und P geht, und parallel zu bX (§. 165) liegt, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke bKx und BKP, bKT und BKT'

$$\frac{bx}{bT}=\frac{BP}{BT'}=\text{Constans.}$$

Ferner hat man auch wegen der Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke bgg^1, BT^1K

$$bg\,.\,KT^1=gg^1\,.\,BT^1;$$

es wird also der obige Werth von P einfach

$$P=\tfrac{1}{2}p\,.\sin ObM\frac{\overline{HP}^2}{\overline{BT^1}^2}.S.\,bg=\tfrac{1}{2}p\,.\sin ObM.\frac{\overline{BP}^2}{BT^1\,.\,KT^1}.S.\,gg^1.$$

Die einzige veränderliche Größe in dieser Formel, das Produkt $S.gg^1$, bezeichnet den Inhalt desjenigen Prismentheils, der durch die Ebenen bK und bT in der, nach außen hin unbestimmt verlängert gedachten, Erdmasse begrenzt wird. Daher ist auch der Elementardruck dP (§. 103), der auf das Element der Oberfläche bb^1 wirkt, proportional dem Volumen der unendlich dünnen Schichte dieses Prismentheils, der den Ebenen bT und bb^1 entspricht; und da alle analogen Pressungen, die der Länge von bK nach wirken, unter sich parallele Kräfte sind, so liegt ihr allgemeiner Angriffspunkt u auf die Linien bK, die von ihrer gemeinschaftlichen Richtung nicht abhängt, und wird nach bekannten Prinzipien der Statik durch den Durchschnitt von bK mit der Ebene wu bestimmt, welche letztere parallel ist zu bT und den Schwerpunkt w des Prismentheiles bKT enthält.

Es kommt daher nur darauf an, die zu KT parallele Entfernung des Schwerpunktes von der Entfernung bT zu finden, oder auch das Verhältnis des entsprechenden Momentes vom Prismentheile bKT zu seinem Volumen. Hierdurch wird die Aufgabe auf eine rein elementare zurückgeführt.

183. Zerlegt man den Prismentheil bKT durch vertikale Ebenen, rechtwinklig auf der durch b gehenden Horizontale an (Figur 32), in Theile, so werden alle Schnitte Dd, Ff, Gg, ... Nn

normal stehen auf *an*, und das Profil $aDFG....Nna$ in eine Reihe von Trapazen zerlegen, die den einzelnen Theilen des in Frage stehenden Prismentheiles zur Grundfläche dienen. Dies vorausgesetzt bezeichne man, für ein beliebiges von ihnen $fFGg$, durch a und b die parallelen oder äußere Seiten Ff und Gg, durch l die Entfernung fg dieser Seiten, durch s die Fläche

$$FGgf = \tfrac{1}{2}(a+b)l,$$

durch θ den Winkel KbT oder KBT^1 (Figur 31) ihrer gemeinschaftlichen Ebene mit der innern Mauerwand, endlich durch das Zeichen Σ eine Summe von analogen Größen oder Produkten, die sich auf verschiedene Trapeze der Polyponalfläche $aDF....Nn$ (Figur 32) die dem Prismentheile bKT zur Grundfläche dient, beziehen, so wird

die Oberfläche dieser Fläche . . . . . . $S = \tfrac{1}{2}\Sigma(a+b)l$
das Volumen des Prismentheiles $S.gg^1 = \tfrac{1}{6} tg\,\theta.\Sigma(a^2+ab+b^2)l$
das Moment desselben in Bezug auf $bT = \tfrac{1}{12} tg^2\,\theta.\Sigma(a^2+b^2)s$
die Entfernugn des Schwerpunktes w von $bT = \tfrac{1}{2} tg\,\theta \dfrac{\Sigma(a^2+b^2)s}{\Sigma(a^2+ab+b^2)l}$.

Da außerdem dieser Schwerpunkt w in der Ebene bw liegen muß, welche die Mitten der zu KT parallelen Kanten enthält, so ist derselbe folglich seiner Lage nach vollkommen bestimmt.

184. Wendet man insbesondere diese Resultate auf unsere Aufgabe an, und bemerkt, daß (Figur 31)

$$BT^1 = BK.\cos\theta$$
$$KT^1 = BK.\sin\theta,$$

so findet man leicht (§. 182):

1) für den neuen Ausdruck des Druckes auf bK

$$P = \tfrac{1}{12} p.\sin ObM \frac{\overline{BP}^2}{\overline{BT^1}^2} \Sigma(a^2+ab+b^2)\,l;$$

2) für die Entfernung seines Angriffspunktes u von b

$$bu = \frac{\Sigma(a^2+b^2)s}{2\cos\theta\,\Sigma(a^2+ab+b^2)\,l}.$$

Diese Ausdrücke würden ganz unabhängig von dem Winkel θ

werden, der implizite in $BT^1 = BK \cos\theta$ vorkommt, wenn man darin anstatt der Linien a, b und der Flächen s, welche sich auf den Querschnitt bT der Erdfüllung beziehen, ihre Werthe als Funktionen von den dem Querschnitt bK entsprechenden Größen substituierte. Man würde auf noch weit einfachere Ausdrücke gelangen, wenn man die Projektion dieses letztern Querschnittes (durch Parallelen wie $g'g$, uu' zu KP, u. s. w.) nach bO betrachten wollte; allein die vorige Methode hat den Vortheil, daß sie in der Folge auf die Bestimmung des Momentes des Mauerwerkes selbst führt, und die gegenwärtige Aufgabe direkter an bekannte Prinzipien der Theorie des Schwerpunktes künpft.

185. Wir wollen uns jetzt mit der Bestimmung der Stärke der Erdbekleidung beschäftigen und der Einfachheit wegen den Theil $CIFK$ mit Mauerwerk, anstatt mit Erde angefüllt annehmen; um aber zu viel Linien zu vermeiden, wollen wir statt Figur **31** die Figur **33** nehmen, wo dieselben Buchstaben dieselben Gegenstände bezeichnen, außer daß hier g, g'' und g' die Schwerpunkte der Schnitte bedeuten, welche in dem unbegrenztem Prisma, das dem Mauerwerk und der Erdfüllung gemeinschaftlich ist, durch die respektiven Ebenen: AT''' normal (§. 180) auf die Kanten dieses Prisma, AE d. i. die äußere Mauerwand und AK' parallel zur innern Mauerwand BK, gebildet werden.

Der Mauerkörper, der immer als eben vorausgesetzt wird und der (§. 180) begrenzt wird durch die Parallele AB zu der Kante EF, besteht aus dem Prisma $ABKK'$ und aus dem Stücke $AK'E$, das aus der Differenz der Stücke $K'AT'''$ und EAT''' bestimmt wird. Bei dem Falle des Umsturzes um die Kante A der Mauer muß man: 1) den Schwerpunkt u dieses Prismas betrachten, der auf derjenigen Linie liegt, die normal auf der Ebene AT''' steht, und die schon durch g, g' und g'' geht; auf dieser Linie liegt er von g' ab um $\mu g' = \frac{1}{2} AB$ entfernt, so daß dadurch seine Lage in Bezug auf die Drehkante A bestimmt wird, 2) müßen die Schwerpunkte m und m' der respektiven Stücke $K'AT'''$ und EAT''' bestimmt werden und zwar nach §. 183.

186. Nun wißen wir schon, daß diese Schwerpunkte auf denjenigen Flächen liegen, die durch die Horizontale des Punktes A gehen und die die parallelen Kanten $K'T'''$ und ET''' der zwei

Mauerstücke in zwei gleiche Theile theilen. Nimmt man überdies an, daß die Buchstaben a, b, l und s sich hier nicht mehr auf die Linien und Flächen eines beliebigen Schnittes bT (Figur 31) beziehen, sondern auf die des Schnittes BT' oder AT'', der in Figur 32 durch den Umfang $ADF..NA'A$ bezeichnet ist; setzt man ferner:

$$S=\tfrac{1}{2}(a+b)l,\quad M=\Sigma(a^2+b^2)s,\quad N=\Sigma(a^2+ab+b^2)l,$$

und nennt auch hier θ den Winkel KBT' oder $K'AT''$, während θ' den Winkel EAT''' der äußern Seitenwand AE (Figur 33) mit der Ebene AT''' bezeichnet, so hat man (§. 183) zur Berechnung der Entfernungen mn, $m'n$ und nA der Schwerpunkte m und m' von dieser letzten Ebene und des n von A:

$$mn=\tfrac{1}{2}tg\theta.\frac{M}{N},\quad m'n=\tfrac{1}{2}tg\theta'\frac{M}{N},\quad An=\frac{M}{N}.$$

187. Sind so die Lagen der Schwerpunkte μ, m und m_1 bestimmt, so folgen daraus direkt ihre respektiven Projektionen r, q und q^1 auf die Horizontale von A, und die Hebelarme Ar, Aq und Aq^1, der entsprechenden Prismen.

Für die Inhalte dieser respektiven Körper hat man (§. 183), wenn man e die Stärke der Mauer nach AB nennt:

Prisma $ABKK'=ABT'T''=S.AB=S.e$

Stück BKT' oder $AK'T''..=S.gg'=\tfrac{1}{6}tg\theta.N$

Stück $AET'''.........=S.gg''=\tfrac{1}{6}tg\theta'.N$

Stück $ABKE........=S.e=\tfrac{1}{6}(tg\theta-tg\theta')N;$

da hier die Böschung von BK sanfter ist, als die von AE.

Hieraus folgen noch die Relationen:

$$\frac{N}{S}=\frac{6.gg'}{tg\theta}=\frac{6.gg''}{tg\theta'}=6.Ag$$

$$\tfrac{1}{6}(tg\theta-tg\theta')\frac{N}{S}=gg'-gg''=g'g'',$$

die dazu dienen können, die Lage der Schwerpunkte g, g' und g'' zu bestimmen, oder das Verhältnis von N zu S zu berechnen, im Falle eine von diesen Größen bestimmt sein sollte.

188. Wir haben nun noch die Stärke und das Moment des Druckes auf die Seitenwand BK (Figur 33) zu bestimmen; der Angriffspunkt desselben ist U und die Richtung desselben ist die einer Geraden UY, welche die Verlängerung von BA in Y trifft und mit BK einen Winkel BUY bildet, der (§. 140) dem Komplement des Winkels φ^1 der Reibung der Erde auf dem Mauerwerke gleich ist; dieser Winkel ist auch gleich dem der Verlängerung von YU mit der Normale UZ auf BK. Nun ist aber (Figur 31 und 33) nach §§. 183, 184, 186

$$P = \tfrac{1}{12}p.\sin O'BM'.\frac{\overline{BP}^2}{BT'^2}.N$$

$$BU = \frac{M}{2\cos\theta.N}.$$

Der Hebelarm AQ dieses Druckes ist gleich der Normale BR, vom Punkte B auf dessen Richtung, vermindert um die Projektion BR' von AB, oder e, auf BR; hieraus folgt, wenn man durch ψ den spitzen Winkel bezeichnet, der durch UY oder AR' mit BY gebildet wird

$$AQ = BU.\cos\varphi' - e\sin\psi.$$

189. Nennt man ferner χ und $\psi' = \psi + \chi$ die Winkel, welche AB und P oder UY mit dem Horizonte bilden, und (§§. 1 und 124) ε den Winkel der innern Seitenwand BK mit der Vertikale; p und p' die respektiven Dichtigkeiten der Füllerde und des Mauerwerkes; δ, δ' die Stabilitätskoeffizienten für den Umsturz um A oder für das Gleiten auf der Horizontalschicht dieses Punktes und nicht auf AB, da hierdurch zu sehr der Einfluß der Reibung reduziert würde; endlich f' den Koeffizienten dieser letzten Reibung, so wie $f = tg\varphi = \cot g\alpha$ den der Erde auf einander, so findet man nach dem Verfahren §§. 110 und 114 zur Berechnung der Mauerstärke nach AB und vorausgesetzt (§§. 185 und 187) daß

$$Ar = \mu g'\cos\chi + Ag'.\sin\varepsilon = \tfrac{1}{2}e.\cos\chi + Ag.\frac{\sin\varepsilon}{\cos\theta}:$$

1) für das Gleiten auf der Schicht in A:

$$e = \frac{P}{f'p'S}(\delta'\cos\psi' - f'\sin\psi') - g'g'',$$

oder wenn man anstatt P seinen obigen Werth setzt, in welchem $N=6S.Ag$ (§. 187)

$$e=\frac{p}{2f'p'}\sin O'BM'.\frac{\overline{BP}^2}{BT'^2}.Ag(\delta'\cos\psi'-f'\sin\psi')-g'g'',$$

2) für den Umsturz um A:

$$e^2+2\left(Ag'.\frac{\sin\varepsilon}{\cos\chi}+\frac{\delta P\sin\psi}{p'S.\cos\chi}\right)e=\frac{2\delta P}{Sp\cos\chi}BU.\cos\psi'$$
$$+2\frac{gg'.Aq}{\cos\chi}-2\frac{gg''.Aq'}{\cos\chi};$$

diese Gleichung, die in Bezug auf e nur vom zweiten Grade ist, kann unter eine noch einfachere Form gebracht werden, wenn man die Schwerpunkte (Figur 33) g', m und m' vertikal nach i, p und p' auf BY projiziert, und bemerkt, daß

$$Ag'.\frac{\sin\varepsilon}{\cos\chi}=Ai,\quad \frac{Aq}{\cos\chi}=Ap,\quad \frac{Aq'}{\cos\chi}=Ap'$$

ist.

190. Anstatt aber bei der Auflösung unter diesen allgemeinen Annahmen zu verweilen, wollen wir lieber zu dem gewöhnlichen Falle übergehen, bei dem man die Reibung auf der Seitenwand BC vernachläßigt und diese selbst vertikal annimmt, und bei dem man die Kanten der Erdfüllung wenig gegen den Horizont geneigt, demnach $\chi=o$ annehmen kann.

Die Gleichung für den Umsturz wird, da φ', ψ, θ, ε, gg', χ Null und $Aq'=-nm'$ sind

$$e^2=\frac{2\delta P}{pS'}.BU+2gg''.m'n.$$

woraus unmittelbar, wenn man $P, BU, gg'', m'n$ durch ihre Werthe (§§. 186 und 188) ersetzt, und wenn man bemerkt, daß hier (§§. 102 und 164) der Winkel $O'BM'$ (Figur 31)$=90^o$, $BLP=KBX^1=\frac{1}{2}KBM^1=\frac{1}{2}\alpha$ ist, sich ergiebt:

$$e=\sqrt{\left(\frac{\delta p}{12p^1}.tg^2\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{6}tg^2\theta'\right)\frac{M}{S}},$$

oder:

$$e = \sqrt{\left(\frac{\delta p}{2p^1} . tg^2 \tfrac{1}{2}\alpha + tg^2 \theta'\right) Ag . An};$$

so daß die Hauptschwierigkeit in der Auffindung der Größen M und S, oder der Entfernungen Ag und An (Figur 33) der Horizontale des Punktes A von dem Schwerpunkte der Basis AT''' des prismatischen Stückes AET''', und von der Projektion des Schwerpunktes seines Volumens auf diese Basis, besteht.

Dritter Abschnitt.

Von der Stabilität der Fundamente und von den Aufgaben, die sich hierauf beziehen.

Obgleich diese Schrift durch die vorigen Untersuchungen schon bedeutend lang geworden ist, so glauben wir dennoch in einige Entwickelung über diesen wichtigen, bisher wenig behandelten, Gegenstand eingehen zu müßen, zumal die vorigen Betrachtungen über den Druck und die Hebkraft der Erde die Hauptelemente der Auflösung in sich faßen.

Erstes Kapitel.

Daten und Auflösung der Haupt-Aufgabe.

§. 191. Es ist ein allgemein zugelaßenes Prinzip, daß bei den zusammendrückbaren Gegenständen die Belastung gleichmäßig auf die horizontale Basis der Fundamente mittelst paßend vertheilter Verstärkungen vertheilt werden müße. Dies Prinzip setzt implizite voraus, daß die Wirkung der oberen Theile vertikal sei, oder einfach ihren respektiven Gewichten zukomme, und daß der Boden selbst homogen sei; dies läßt sich aber nicht auf Erdbekleidungen und isolierte Gewölbpfeiler anwenden, die einem Seitendruck unterworfen

sind, da daraus eine bedeutende Ursache eines ungleichmäßigen Druckes auf die Fundamentenbasis herbeigeführt würde.

192. Lambel betrachtet in einem Memoire, das er im November 1816 der Comité des fortifications*) übergab, und worin er zuerst die Aufmerksamkeit der Ingenieure auf diesen Gegenstand lenkt, einen homogenen zusammendrückbaren Boden als eine Flüßigkeit von sehr großer Dichtigkeit, und nimmt als neue Bedingung des Gleichgewichtes an, daß das Moment der, auf das obere System wirkenden Kräfte, gleich sein müße dem der aus dem Wege gedrängten Flüßigkeit, indem man abwechselnd die vordere oder hintere Kante als diejenige betrachtet, um welche der Umsturz geschieht; dies Prinzip kommt im Grunde darauf zurück, daß man die Mittelkraft durch den Mittelpunkt der Figur dieser Basis gehen läßt.

Es folgt ferner aus den Rechnungen Lambel's, daß diese Bedingung nahe bei dem gewöhnlichen Vaubanschen Profile mit Strebepfeilern erfüllt ist; man muß jedoch nicht vergeßen, daß, unabhängig von den hier nicht berücksichtigten Kräften, diese nämliche Bedingung voraussetzt, daß alle Theile des Fundamentes so unwandelbar mit einander verbunden sind, daß keine Trennung stattfinden könne. Dies läßt sich im allgemeinen nicht bei den Strebepfeilern annehmen und selbst nicht bei den Verstärkungen, welche einen gewissen Vorsprung in Bezug auf ihre Höhe darbieten, es sei denn, daß dieser Vorsprung vertheilt, oder durch eine Abschrägung mit den Pfeilern oder Strebepfeilern verbunden ist, die sich auf einen beträchtlichen Theil dieser Höhe selbst erstreckt, wie dies auch Lambel in dem erwähnten Memoire pag. 43 und 65 mit Recht vorschreibt.

193. Français (Mémorial de l'officier du génie Nro. 4 1820) und nach ihm Navier (Applications de la mécanique aux constructions) haben gesucht, der Bedingung des Gleichgewichtes durch äußere Absätze zu genügen, bei deren Berechnung sie durchaus keine Rücksicht auf die Seitenwirkung nehmen, welche die

*) Dies Memoire ist zu Metz im Jahre 1822 unter dem Titel: Application du principe des vitesses virtuelles à la poussée des terres et des voûtes gedruckt.

Erde des vordern oder hintern Bodens auf die Fundamentenmasse ausübt, so wie auch nicht auf die Möglichkeit des horizontalen Gleitens auf der Basis dieser Masse. Beide nehmen an, daß dieses Gleiten durchaus verhindert wird, sowohl durch den natürlichen Widerstand des Terrains, als auch durch beliebige künstliche Mittel.

Diese Ingenieure überlaßen es also der Erfahrung des Bauenden, wie er in jedem einzelnen Falle diese letztere Wirkung des Druckes aufheben will, als wenn diese Aufgaben sich nicht der Rechnung unterwerfen ließen, und keinen integrierenden Theil des Problems von der Stabilität der Konstruktionen bildeten. Das folgende wird hoffentlich die Ingenieure von diesem Irrthume abbringen; vorher wollen wir jedoch zeigen, daß Vauban das Prinzip gekannt hat, mit Hülfe dessen man sich bei dem Entwurfe der Fundamente von Gebäuden leiten laßen muß. Die Zufälligkeiten, die ihm bei der Befestigung von Ypres und Bergues aufstießen, haben ihn genugsam darüber belehrt*) und wenn man glaubt, daß der größte Theil

---

*) Diese Zufälligkeiten finden sich aufgezeichnet in einer interessanten Stelle des Vaubanschen Memoires über ein Befestigungsprojekt der Schleusenkammer zu Bösinghe im Jahre 1699; diese Stelle findet sich wirklich von Augoyat abgedruckt in einer Anmerkung über die Ingenieure **Huë de Caligny** (**Spectateur militaire**, 1839, **tome XXVII**, **pag.** 323). Vauban bemerkt daselbst, daß das Terrain, auf welchem die Fortifikationen von Ypres und Bergues erbaut sind, aus einer groben schlammigten Erde ohne Zusammenhalt bestehe, die während der Trocknis bedeutend (3 bis 4 Zoll) aufgeht, erweicht und schmierigt wird, wie Seife im Waßer, so daß sie sich nur auf einer Böschung erhält, wo die Grundlinie mehr als zweimal die Höhe übertrifft, »und demnach Gleitungen erregt, die den Druck der Erde auf 30 bis 40 Fuß weit bei Höhen von 20 bis 25 Fuß bewirken.« Dann fügt er hinzu: »Es ist hier kein anderes Mittel als zu be»kleiden, anstatt auf dem heißen Sande zu gründen, der häufig sich gar »nicht vorfindet, da er zu tief liegt, oder so niedrig zu gründen (10, 12 »bis 15 Fuß), daß die Erde in der Sohle des Grabens sich gegen den »Druck der Erdbekleidung erheben könne; denn man kann weder auf »einen Felsen, noch auf Grundpfähle u. s. w rechnen, da das Holz viel »zu selten ist.« Er räth dann, die Erde hinter der Erdbekleidung bis auf die Sohle des Grabens auf eine Weite von 18 bis 20 Fuß auszugraben, »die Füllerde zu stampfen und mit Faschinen zu befestigen, um »den Gleitungen zuvorzukommen, diesen unglückseligen Einstürzungen, über »die wir so manche betrübende Erfahrungen gemacht haben, so daß man »jetzt nicht mehr Irrthümer dabei begehen darf.« Die angeführte Erde gehört zur Klasse des Mergels, dessen einsaugende Eigenschaft der Wärme, und dessen Schmierigkeit dem Alaune zukommt; er kommt zuweilen bei dem Fundieren vor (wie dies der anonyme Verfaßer des **Mémoire sur les eboulements de Bergues**, das wir weiter unten noch zitieren werden be-

der Zufälligkeiten, welche sich seitdem und noch ganz neuerlich bei den Zivil= oder Militärbauten gezeigt haben, vorzüglich den Fehlern der Fundamente zuzuschreiben sind, so muß man bekennen, daß solche Aufgaben von bedeutendem Interesse sind, und daß die Nachfolger Vaubans nicht ungestraft das Hauptprinzip dabei vernachläßigt haben.

194. Vauban hat, so viel uns bekannt ist, bei keinem seiner Projekte, den Fundamenten größere Vorsprünge als **2½** bis **3** Fuß gegeben; auch hat er dieselben, ausgenommen an schwachen Stellen, nicht durch eine schräge oder stufenförmige, nach außen gerichtete Fläche begrenzt, um dadurch eine Art von Keil zu bilden, der gerade wie ein Pflugeisen wirken würde. Er hat immer sorgfältig in seinen Entwürfen die Stufen angezeigt, welche zur Ausfüllung der Erde hinter den Erdbekleidungen dienen, aber niemals hat er, so viel wir wißen, dies für den Theil des Fundamentes unter der Sohle der Gräben gethan, wenn diese auch **14** bis **15** Fuß tief waren, dies beweis't, daß nach Vaubans Ansichten dieser Theil vertikal ausgegraben und unterstützt werden mußte, um jede Bewegung der Erde zu vermeiden, die ihre natürliche Kohäsion zerstören oder ihre Hebkraft vermindern konnte. Endlich sehen wir aus seinen Profilen, daß er nur eine **3**füßige Tiefe der Fundamente für gewöhnliche Erdbekleidnngen, und eine **6**füßige für die Halbbekleidungen ansetzte. Alles dieses deutet sicher auf ein festes Prinzip; aber am deutlichsten beweisen dessen Vorhandensein die Anwendungen, die er in seinen Entwürfen für am Waßer liegende Plätze gemacht hat.

Die Figuren **34** bis **40** stellen die Profile verschiedener Werke von Ypres vor, die von Vauban **1699** projektiert sind; diese Pro=

---

merkt), und zwar in der Form von blätterartigen Lagen, die anscheinend hart sind, aber leicht Waßer einsaugen und dadurch eine Art von Flüßigkeit erlangen, in Folge deren sie, wie der Verfaßer bemerkt, gleich den Flüßigkeiten, von unten nach oben wirken. Wir wollen hierbei noch im allgemeinen bemerken, daß es nicht geeignet sein würde, die natürliche Böschung der Erde bei geringen Höhen zu meßen, wenn sie auch frisch aufgelockert würde und selbst aus reinem Sande bestände, der immer mehr oder weniger feucht ist; denn der Einfluß der Kohäsion könnte so einwirken, daß dieselbe Wirkung bei größern Höhen entweder gar nicht mehr, oder doch nur in geringerem Grade stattfände.

file verdanken wir der Mittheilung des Ingenieurs A. de Caligny, der sich den mechanischen Wissenschaften hingiebt und ein Nachkomme der Fortifikationsdirektoren dieses Namens ist. Diese Profile, die sämmtlich von Vauban selbst gezeichnet sind, sind wegen der Verschiedenheit der Daten und der Auflösungen in Bezug auf die Konstruktionen, sowohl über als unterhalb des natürlichen Bodens, bemerkenswerth. Obgleich sie derselben Lokalität angehören und nach ökonomischen Rücksichten erbaut sind, so bieten sie dennoch, wie man sieht, Tiefen der Fundamente zwischen 4 und 17 Fuß*) vom

---

*) Diese Tiefen wachsen nahe mit den reduzierten Höhen der Erdfüllung über dem Boden der Fundamente, und sind davon im Mittel der dritte Theil. Es scheint schwierig zu sein, diese Regel zu berichtigen, da man annehmen muß, daß Vauban, da er keine Rücksicht auf Reibung genommen hat, einfach die Hebkraft der Erde dem Drucke proportional gesetzt habe. Die letztere Kraft hat näherungsweise (§. 6) den Werth:

$$\tfrac{1}{2}p \,.\, tg^2 \tfrac{1}{2}\alpha (H+h+z)^2,$$

worin z die Tiefe der Fundamente unter dem Niveau, $H+h$ die reduzierte Höhe der Erdlast über demselben Niveau ausdrückt, während die Hebkraft (§. 164 und Anmerkung am Ende dieses Werkes) durch die Formel:

$$\tfrac{1}{2} \cdot p_1 \,.\, \mathrm{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 \, z^2$$

ausgedrückt ist, wo p_1 die Dichtigkeit und α_1 den Winkel der natürlichen Böschung der Grabenerde mit der Vertikale bedeutet. Man erhält daher in der Annahme des strengen Gleichgewichtes in Bezug auf das Gleiten

$$z = \sqrt{\frac{p}{p_1}} \,.\, tg \tfrac{1}{2}\alpha \,.\, tg \tfrac{1}{2}\alpha_1 (H+h+z)$$

welcher Ausdruck die Form hat, die wir für die Vaubansche Regel angenommen haben.

Ueber den Werth des numerischen Koeffizienten

$$\sqrt{\frac{p}{p_1}} \,.\, tg \tfrac{1}{2}\alpha \cdot tg \tfrac{1}{2}\alpha_1$$

kann man verschiedene Annahmen machen, die alle den oben erwähnten Bruch $\tfrac{1}{3}$ hervorbringen würden. Setzt man z. B. $p_1 = p$, $tg\,\alpha = 1$, $tg\,\alpha_1 = 2$, oder $\alpha = 45^0$, $\alpha_1 = 63^0 26^1$, so würde dieser Koeffizient $= 0{,}256$, der nur um 0,3 seines Werthes von dem Bruche $\tfrac{1}{3}$ verschieden ist, der als nothwendig erscheint, um dem Fundamente einen gewissen Ueberschuß an Stabilität gegen das Gleiten zu verschaffen. Obgleich diese Annahmen keine Unrichtigkeiten enthalten, so sind dennoch die aus ihnen erhaltenen Resultate zu übertrieben, und scheint es für die Oekonomie der Konstruktionen unumgänglich nothwendig, auf das Hindernis Rücksicht zu nehmen, welches die Reibung auf dem Boden hervorbringt, so wie auf die wahren physikalischen Eigenschaften der Erde; dies soll auch in dem gegenwärtigen Kapitel geschehen.

Niveau des Grabens an gemeßen, dar. Die eigene Vergleichung mit diesen Profilen, werden mehr hierüber sagen, als lange Erörterungen; uns schien es nützlich, die Sache hier anzuregen, wenn auch nur, um die Wichtigkeit zu zeigen, die Vauban auf diese Aufgabe über die Fundamente legte, so wie den Geist, in welchem er dieselbe betrachtete; denn hier handelte es sich offenbar nicht darum, das Ausgraben bis auf guten Grund fortzusetzen, noch auch künstliche Befestigungsarten, wie z. B. Pfähle, Spundwände u. s. w. anzuwenden, durch die oft die Finanzen des Staates aufs äußerste gemißbraucht sind.

Von dem Umsturze und dem Gleiten des Mauerwerkes auf dem Boden der Fundamente.

195. Die schon erwähnten Zufälligkeiten, namentlich diejenigen, welche sich bei den militärischen Werken der Plätze Bergues, Juliers, Cassel ꝛc. und neuerlich noch bei andern Oertern gezeigt haben, müßen vorzüglich dem Gleiten auf der Fundamentenbasis zugeschrieben werden. Man hat in der That die Eskarpen dieser Werke unter dem Einfluße des Druckes und der erlangten Geschwindigkeit 1 bis 2^m nahe mit sich selbst parallel vorrücken sehen, trotz des bedeutenden Widerstandes, der sich dieser Bewegung an den Enden der Seiten entgegensetzte. Wenn gleich nun die Wirkungen, welche durch den Umsturz hervorgebracht werden, weit weniger gefährlich sind, und meistens nur eine geringe Neigung des Mauerwerkes verursachen, so haben wir dennoch auch diesen Fall, um nichts zu wünschen übrig zu laßen, behandelt.

Sei $ABCD$ (Pl. V. Figur 41) das Profil einer Futtermauer, die den Erdaufwurf IEF trägt, und deren Fundament die Form $A^1B^1C^1D^1$ mit Vorsprüngen AD^1, BC^1 und äußerer Böschung A^1D^1 mit oder ohne Stufen hat. Da die Oberfläche, auf welche der Erddruck wirkt, wegen des innern Vorsprunges BC^1 diskontinuirlich ist, so würde es sehr schwer sein, die Stärke dieser Wirkung nach den Prinzipien zu entwickeln, die uns bisher geleitet haben; da es sich hier aber nur um Annäherungen handelt, und da dieser Vorsprung, wenn er vorhanden ist, immer sehr klein ist, so kann man zur Vereinfachung der Rechnungen die fragliche Seitenwand durch eine einzige mittlere Ebene ersetzen, wie z. B. HCB^1, ohne

sich um die wirkliche Art der Wirkung der Erde auf BC^1 zu bekümmern.

Ferner kann man die Gerade A^1D^1, welche nach außen hin das Fundamentprofil begrenzt, bis zum Durchschnitt H^1 mit der obern Fläche I^1E^1 des Grabenprofils $I^1E^1F^1I^1$ verlängern, und als diejenige Mauerwand betrachten, auf welche der Druck oder die Hebkraft dieser Erde wirkt, und die sich mit der Reibung auf der Basis A^1B^1, dem Gewichte des Mauerwerkes und des, dasselbe bedeckenden, Erdprismas ICH, allen Arten von virtuellen Bewegungen widersetzt, die durch die Wirkung der Füllungsmasse hervorgebracht werden können. Faßt man die Sache so auf, so wird es nicht schwer sein, die Methoden, welche in der vorigen Sektion auseinander gesetzt sind, auf die Bedingungen der Stabilität unter Annahme des Gleitens oder des Umsturzes auf dem Boden der Fundamente zu erweitern; dies wird genügen, um sich der Stabilität in jedem Sinne zu versichern, indem die vertikalen Reaktionen des Bodens als stark genug angenommen werden, um die parallelen Seitenkräfte der gegebenen Kräfte mittelst einer leichten Erhebung, eines leichten in die Höhe Strebens des Bodens, was der Annahme nach keine Gefahr bringt, aufzuheben.

196. Erster Fall; der des Umsturzes (Figur 41). Nimmt man à priori für nicht zusammendrückbares Terrain den Umsturz um die innere Kante B^1 des Fundamentes als weniger zu erwarten an, als den um die äußere Kante A_1, so würde es genügen, sich mittelst eines passenden Stabilitätskoeffizienten oder einer geeigneten Stabilitätsüberhöhung (§§. 18 und 91) des Gleichgewichtes um diese letztere Kante zu versichern; läßt man aber eine gleichmäßige Zusammendrückbarkeit des Bodens zu, so muß man nach dem, §§. 192 und 193 erwähnten, Stabilitätsprinzipe das Fundament so einrichten, daß die Resultante aus allen wirksamen Kräften durch den Schwerpunkt V seiner Basis geht, indem man ihn als den Angriffspunkt der Mittelkraft der Reaktionen dieses Bodens betrachtet. Dies kommt einfach darauf zurück, daß man einander die Momente der fraglichen Kräfte in Bezug auf diesen Punkt V gleich setzt; unter diesen Kräften würden jedoch weder die Hebkräfte, noch auch die Reibungen auf den Flächen A^1H^1 und B^1H, zu

denen dieser angenommene Umsturz Veranlaßung geben konnte, mitbegriffen sein.

Da jedoch diese abstrakte Bedingung unter gewissen Umständen schwer zu erfüllen ist, so halten wir (da unsere Methoden, ohne die Auflösungen noch mehr zu verwickeln, es gestatten, auf die Widerstände Rücksicht zu nehmen, die aus einer wirklichen virtuellen Bewegung entstehen) es für nützlich, die Aufgabe in Bezug auf den Umsturz um die Fundamentenbasis unter dieser allgemeinen Annahme zu betrachten, und diese nöthigenfalls, außer bei besondern Annahmen, dem angezeigten Prinzipe gemäß zu beschränken.

197. Nimmt man daher an, daß die Erdbekleidung (Figur **41**) auf dem Punkte stehe, der Wirkung des Erddruckes zu weichen, indem sie, von hinten nach vorne zu, sich um den Punkt V der Fundamentbasis A^1B^1 dreht; für diesen Punkt V könnte man jeden beliebigen nehmen; wir wollen aber annehmen, daß er mit dem Schwerpunkte zusammenfalle. Zuerst bestimme man dann den Druck P auf B^1H, seinen Angriffspunkt U, seine Richtung UT und seinen Hebelarm VT in Bezug auf V nach den Methoden §§. **151** oder **124** ꝛc. Darauf bestimme man nach denselben Verfahrungsarten oder nach denen §§. **161** folg., wenn das Profil des Grabens ein gleichförmiges Gefälle besitzt, entweder den Druck, wenn es sich nur darum handelt, der abstrakten Bedingung §. **196** zu genügen; oder allgemeiner die Hebkraft auf die äußere Böschung A^1H^1 der Fundamente, so wie ihren Angriffspunkt U^1, der auf $\frac{1}{3}$ dieser Linie von A^1 ab liegt, wenn die obere Fläche I^1E^1 sich weit genug erstreckt (§. **162**), endlich ihre Richtung U^1T^1 und ihren Hebelarm VT^1 in Bezug auf V. Bezeichnet dann die Vertikale $A^1L = B^1C^1$ die Höhe von A^1 unter der verlängerten BA; s^1 die vertikale Projektion des Schwerpunktes g^1 vom Erddreiecke ICH, dessen Höhe $= Hh$ ist und das die Mauerkrone bedeckt, auf die Basis A^1B^1; endlich s die nämliche Projektion des Schwerpunktes g vom Trapeze $ABCD$*) den man auf der Stelle erhält, wenn man die Diagonalen AC und BD, die sich in l schneiden, zieht und durch eine Gerade lm die Mitte von dieser mit dem Punkte m verbindet, der

---

*) Größerer Genauigkeit wegen, würde es in gewissen Fällen zweckmäßiger sein, für die Grenze des Trapezes $CDAC^1$ die Linie HB^1 anzunehmen.

auf der andern durch die Bedingung $Am = Cl$ bestimmt ist; und dann endlich auf dieser Geraden $ig = \frac{1}{3} mi$ nimmt; bemerkt man überdies, daß die Trapezfläche $ABCD$ gleich ist dem Produkte von $\frac{1}{2}(AB + CD)$ in die Höhe H der Mauer; daß das Trapez $A^1 B^1 C^1 D$ gleich ist dem Rechteck $A^1 B^1 C^1 L$, dessen Moment in Bezug auf den Schwerpunkt V der Basis verschwindet, weniger dem Drucke $A^1 D^1 L$, dessen Moment

$$= \tfrac{1}{2} LD^1 . A^1 L (VA^1 - \tfrac{1}{3} D^1 L)$$

ist: so hat man, um die obige Bedingung der Stabilität um den Punkt V auszudrücken, vorausgesetzt, daß das Moment der Reibung auf $A^1 B^1$ hier natürlich null ist, die Gleichung:

$$P.VT - B.VT^1 - \tfrac{1}{2} p^1 (AB + CD) H.Vs$$
$$+ \tfrac{1}{2} p^1 LD^1 . A^1 L (VA^1 - \tfrac{1}{3} D^1 L) - \tfrac{1}{2} p.IC.Hh.Vs^1 = 0.$$

198. Dividiert man alle Glieder dieser Gleichung durch ein Quadrat, wie z. B. $\frac{1}{2} H^2 p^1$, um sie lineär zu machen und durch 3te oder 4te Proportionallinien konstruieren zu können, d. h. wendet man auf sie analoge Methoden an, wie die §§. **110** oder **130** und folg., um Rechnungen und Längenmeßungen nach dem Maaßstabe zu vermeiden, so wird es sehr einfach sein, die Bedingung der Stabilität in Bezug auf den Umsturz um den Boden, für eine Erdbekleidung und eine Fundierung von gegebener Form, zu finden.

Wenn man aber mit Français die unbekannte Basis $A^1 d^1 = D^1 L$ der äußeren Fundamentböschung — die wir für fehlerhaft halten (§. **194**) und die man vielmehr nach der entgegengesetzten Richtung anbringen müßte, um die Hebkraft zu vermehren, die auch überdies unmerklich bei unsere allgemeinen Annahmen ausfallen würde — bestimmen will, oder mit Navier (§. **193**) die Breite des äußern Vorsprunges $D^1 A$, indem man dabei $A^1 D^1$ als vertikal annimmt, was zwar einfacher und der Stabilität günstiger, aber weniger ökonomisch ist; oder endlich, wenn diese Breite à priori bestimmt ist, nach dem Vaubanschen Prinzipe (§. **194**) die Tiefe $B^1 C^1$, welche dem Fundamente für ein gegebenes Terrain zukommt: so kann man bei diesen verschiedenen Annahmen vortheilhaft, wie in §. **112**, die Methoden der Fehlerkurven benutzen, um die unbekannt gebliebene Größe zu finden; dies wird schneller zum Ziele führen,

als die Entwickelung der Gleichung und die Lösung derselben nach der allgemeinen Methode.

199. In dem besondern Falle, wo A^1D^1 mit der Vertikale D^1d^1 des Punktes D^1 zusammenfällt, und wo D^1C^1 d. i. d^1B^1, dann gleich $2\,VB^1$ oder $2\,Vd^1$, allein unbestimmt bleibt, während B, P unmittelbar sich berechnen laßen und $A^1D^1d^1$ verschwindet, ist es vorzuziehen, von B^1 und d^1 die Normalen B^1t, d^1t^1 auf die Richtung der Kräfte P und B zu fällen, und anstatt der Hebelarme Vs, Vs^1, VT und VT^1 die ihnen gleichen VB^1-B^1s, $VB^1-B^1s^1$, $B^1t-PB^1.\sin\psi$ und $d^1t^1-Vd^1\sin\psi_1$ zu setzen, da die Normalen B^1t, d^1t^1 und die Winkel $\psi=90^0-VB^1t$, $\psi_1=90^0-Vd^1t^1$ unmittelbar gegeben sind.

Substituiert man in der That diese Größen in die obige Gleichung, so wird sie, da $VB^1=Vd^1=\frac{1}{2}D^1C^1$ ist

$$\tfrac{1}{2}D^1C^1=\frac{B.d^1t^1-P.B^1t-\frac{1}{2}p^1(AB+CD)H.B^1s-\frac{1}{2}p.IC.Hh.B^1s^1}{B.\sin\psi_1-P.\sin\psi-\frac{1}{2}p^1(AB+CD)H-\frac{1}{2}p.IC.Hh},$$

die hier nur vom ersten Grade ist, aber sehr verwickelt würde, wenn A^1D^1 nicht mit der Vertikale D^1d^1 zusammenfiele.

200. Bedient man sich der Gleichung §. 197, wenn man nur die Stabilität einer gegebenen Konstruktion rücksichtlich des Umsturzes um den Boden untersuchen will, so erinnere man sich, daß, wenn das erste Glied dieser Gleichung positiv gefunden würde, dies ein Zeichen sein würde, daß die Mittelkraft aller Kräfte diesseits des Schwerpunktes V, d. i. zwischen A^1 und V durchgeht, und die vordere Kante des Fundamentes einzudrücken sucht, während das Gegentheil stattfinden würde, wenn dies erste Glied negativ wäre. Am einfachsten wird es für diese Untersuchung im allgemeinen sein, wenn man direkt die fragliche Mittelkraft konstruiert, indem man zu zweien die bestimmten Kräfte der Größe und Richtung nach auf der Figur zusammensetzt.

201. Zweiter Fall; der der Gleitung. Behält man alle vorigen Annahmen und Bezeichnungen bei und nennt ferner $f_1{}^1$ den Koeffizienten der Reibung des Mauerwerkes auf dem Boden der Fundamente; sei ferner die Grabenerde verschieden von der Füllerde, und der Reibungskoeffizient beider aufeinander $=f_1$, so wie p_1 die Dichtigkeit oder das Gewicht eines Kubikmeters lockerer Erde;

seien endlich ψ und ψ_1 die spitzen Winkel, welche die Richtungen des Druckes P auf $B^1 H$ und der Hebkraft B auf $A^1 H^1$ mit der unbegrenzten Horizontale $A^1 B^1$ der Fundamentbasis bilden, so erhält man für die Bedingung der Stäbilität in Bezug auf das Gleiten auf dieser Basis

$$\delta^1{}_1 P\cos\psi - B.\cos\psi_1 =$$
$$f_1{}^1 \{ P\sin\psi + B\sin\psi_1 + \tfrac{1}{2}p^1(AB+CD)H + \tfrac{1}{2}p^1(A^1B^1+C^1D^1)B^1C^1$$
$$+ \tfrac{1}{2}p.IC + Hh \};$$

wo noch $\delta_1{}^1$ den Stabilitätskoeffizienten bedeutet, durch den man den Widerständen einen bestimmten Ueberschuß zu geben beabsichtigt und der nicht unter 2,0 bis 2,5 genommen werden dürfte, wenn man auf die Reibung auf den Seiten $B^1 H$ und $A^1 H^1$ bei der Berechnung von P und B Rücksicht nehmen wollte; es würde vielleicht passender sein, anstatt dieses Koeffizienten eine Stabilitätsüberhöhung von 5 bis 6^m (§§. 89 ff.) anzunehmen.

Dividiert man alle Glieder dieser Gleichung durch einen bestimmten Theil der Mauerhöhe H, um sie lineär und unmittelbar konstruierbar zu machen, so kann man sie wie die §. 197 behandeln, wenn man sie nicht lieber unmittelbar der numerischen Rechnung unterwerfen will. Da aber die gegenwärtige Aufgabe weit wichtiger für die Stabilität der Fundamente ist, so wollen wir die Auflösung derselben für den gewöhnlichen Fall und unter den Annahmen des ersten Abschnittes geben; die letztern sind in Figur 42 angegeben, wo die Erdüberhöhung $IEF....$ durch die mittlere Horizontale EF oder OM und durch die innere Seitenwand BC der vertikalen und bis auf die Fundamentbasis $A^1 B^1$ nach B^1 verlängerten Mauer begrenzt wird. Der Vorsprung BC^1 ist, wenn er vorhanden ist, so gering, daß man ihn vernachläßigen und $B^1 C$ oder $B^1 H$ als wahre Stützfläche der Erde annehmen kann.

202. Bei der gegenwärtigen Aufgabe erscheint es zweckmäßig, die Reibung auf dieser Fläche zu vernachläßigen; errichtet man daher in B^1 die Normale $B^1 O$ auf die Parallele zur natürlichen Böschung der Erde $B^1 M$, und trägt von O aus, wo sie die mittlere Horizontale EF trifft, auf OB^1 die Entfernung $OP = OH$ ab, so erhält man (§§. 26 und 101) für die Berechnung des horizontalen Druckes auf $B^1 H$ die Formel:

$$P=\frac{1}{2}p.\overline{B^1P}^2=\frac{1}{2}p\left\{\sqrt{1+f^2}-\sqrt{f^2+\left(\frac{HG}{B^1G}\right)^2}\right\}\overline{B^1G}^2,$$

oder, wenn man durch z die unbekannte Stärke A^1L des Fundamentes bezeichnet, während h^1 (§. 1) die Höhe von GH, $H+h$ die von $BC+CG$ u. s. w. bedeutet

$$P=\frac{1}{2}p\left\{(H+h+z)\sqrt{1+f^2}-\sqrt{f^2(H+h+z)^2+h^{12}}\right\}^2.$$

Um die Hebkraft B auf A^1H^1 zu erhalten, lege man durch den Punkt A^1 auf der Seite des Grabens (§§. 162 und 163) die Gerade A^1O_1, die mit A^1H^1 den Winkel $O_1A^1H^1=\varphi_1$ d. i. den Winkel der natürlichen Böschung der Erde mit dem Horizonte, bildet und trage vom Durchschnitt O_1 mit der Linie $Nl^1H^1E^1$, welche die unbegrenzte Oberfläche des Grabens bezeichnet, auf der Verlängerung von A^1O_1 die Entfernung $O_1y_1=O_1H^1$ ab, so erhält man:

$$B=\frac{1}{2}p_1\cos\varepsilon_1.\overline{A^1y_1}^2,$$

wo E_1 (§§. 146 und 161) den Winkel LA^1D^1 der Böschung A^1H^1 mit der Vertikale, und p_1 das Gewicht eines Kubikmeters Grabenerde bezeichnen.

Man kann aber auch diese Hebkraft direkt nach der Formel (2) der Anmerkung zu diesem Buche berechnen, die in dem gegenwärtigen Falle wird:

$$B=\frac{1}{2}p_1\cos\varepsilon_1\frac{\cos^2\frac{1}{2}(\alpha_1-\varepsilon_1)}{\sin^2\frac{1}{2}(\alpha_1+\varepsilon_1)}\overline{A^1H^1}^2,$$

wo $\alpha_1=90^0-\varphi_1$ den Winkel der natürlichen Böschung der Grabenerde mit der Vertikale bezeichnet.

Legt man endlich durch das untere Ende der Böschung A^1H^1 nach der Mauer zu die Linie A^1M parallel zur natürlichen Böschung der Grabenerde, und theilt das Supplement des Winkels $H^1A^1M_1$, welchen diese Parallele mit der erstern Böschung bildet, in zwei gleiche Theile, oder errichtet man in A^1 eine Normale auf der Halbierungslinie dieses letztern Winkels, so erhält man (§. 163) die virtuelle Bruchlinie A^1Y_1 derselben Erde, wenn sie gerade der überwiegenden Wirkung des Druckes weichen will; den Punkt Y_1 dieser Linie (ibid) würde man unmittelbar finden, wenn man auf

der Verlängerung von $H^1 O_1$, $O_1 Y_1 = O_1 A^1$ nähme, oder die Linie $y_1 Y_1$ parallel zu $A^1 M_1$ legte.

203. Dies vorausgesetzt, nenne man l die Tiefe LL_1 des Vorsprunges $D^1 A$ unter dem Niveau des Grabens und bemerke, daß

$$A^1 H^1 = \frac{z+l}{\cos \varepsilon}.$$

$$A^1 B^1 = C^1 D^1 + D^1 L = C^1 D^1 + tg\,\varepsilon_1 z;$$

substituiert man endlich diese verschiedenen Werthe in die Gleichgewichtsgleichung §. **201**, indem man darin $\psi = 0$ und $\psi_1 = \varepsilon_1$ setzt, so wird sie, vorausgesetzt, daß P und B normal auf die Seitenwände $B^1 H$ und $A^1 H^1$ sind, wenn man die Reibungen vernachläßigt, im allgemeinen in Bezug auf z vom 4ten Grade sein, und eine sehr verwickelte Form annehmen, so daß sie sich nicht nach den direkten Methoden auflösen läßt.

Betrachtet man die Aufgabe unter diesem allgemeinen Gesichtspunkte, so wird es demnach beßer sein, die Gleichung in ihrer ursprünglichen Form zu laßen, und P und B durch die obigen analytischen Ausdrücke zu berechnen, im Fall man nicht auf die Konstruktionen der Figur zurückgehen kann. Steht die Sache aber anders, so ist es einfacher für P und B in die nämlichen Gleichung die Ausdrücke $\frac{1}{2}p.\overline{B^1 P}^2$, $\frac{1}{2}p\cos\varepsilon_1.\overline{A^1 y_1}^2$ zu substituieren, und sie dann nach der §. **202** genannten Methode zu behandeln, die auch in dem allgemeinen Falle ihre Einfachheit beibehält. Der einzige Unterschied besteht in der Konstruktion der Linien $B^1 P$ und $A^1 y_1$ für die verschiedenen Lagen, die man der Horizontale $A^1 B^1$ giebt; dieselbe ist aber immer leicht nach §§. **143**, **147**, **151**, ff. auszuführen.

204. Da der hohe Grad der Gleichung in z allein von der Wurzelgröße $\sqrt{(H+h+z)+h^{1\,2}}$ im Ausdrucke für P herrührt, so wird dieser Grad offenbar auf den zweiten herabsinken, wenn $h^1 = HG$ verschwindet, sei's daß der besondere Fall Figur 2 §. 6 eintritt, oder daß die geringe Höhe oder die besondere Form des Profiles $IEF\ldots$ (Figur **42**) des Erdaufwurfs es gestattet, statt dessen eine andere mittlere Horizontale anzunehmen, die in der Verlängerung CG die innere Mauerwand endigt, wie dies von Français geschehen ist. Dennoch ist die Gleichung, auf welche man

gelangt, noch so zusammengesetzt, daß man schneller mit Hülfe der erwähnten geometrischen Methode zum Ziele gelangt.

Da hier nur von einer Annäherung die Rede ist, und alle Annahmen gestattet sind, die die Stabilität fördern, sobald sie nicht die Dimensionen und Kosten zu sehr übertreiben, so wollen wir unabhängig von der Annahme $h^1 = o$, die bei den Halbbekleidungen eintreten kann und darauf zurückkommt, daß man das Dreieck HEG als mit Erde angefüllt annimmt: die Reibung vernachläßigen die dem Gewichte des dreiseitigen Prismas $A^1 D^1 d^1$ des Fundamentes zukommt, wenn dasselbe vorhanden sein sollte (§. 194). Man kann daher unbesorgt jeden Stabilitätskoeffizienten weglaßen.

Unter diesen Annahmen wird die Gleichung des Gleichgewichtes in Bezug auf das Gleiten (§. 201), wenn man die Annahmen und Bezeichnungen §§. 201 und 202 (Figur 42) beibehält:

$$a^2 y^2 - b^2 (y - m)^2 - 2 \frac{p^1}{p} f_1{}^1 L y + 2 f_1{}^1 A = o$$

wo der Abkürzung wegen $C^1 D^1 = L$ gesetzt ist,

$$(\sqrt{1 + f^2} - f)^2 = tg^2 \tfrac{1}{2}\alpha = a^2$$

$$\frac{p^1}{p}(1 + f_1{}^1 tg\,\varepsilon_1) \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(\alpha_1 - \varepsilon_1)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha_1 + \varepsilon_1)} = b^2,$$

$$NG \text{ oder } H + h - l = m$$

$$B^1 G \text{ oder } H + h + z = y$$

$$\frac{p^1}{p}(D^1 C^1 . BG - \text{Oberfl.} ABCD) - \text{Oberfl.} ICH = A.$$

Löſt man diese Gleichung in Bezug auf y auf, so hat man

$$y = \frac{p m b^2 - p^1 f_1{}^1 L}{p(b^2 - a^2)} + \sqrt{\left\{\frac{p m b^2 - p^1 f_1{}^1 L}{p(b^2 - a^2)}\right\}^2 - \frac{m^2 b^2 - 2 f_1{}^1 A}{b^2 - a^2}}.$$

205. Für die gewöhnlichen geringen Erdaufwürfe kann man sich die Mühe ersparen, das Dreieck ICH zu berechnen, dessen Fläche in dem Ausdrucke von A vorkommt; anders ist dies jedoch bei Halbbekleidungen, hier kann es sogar nöthig werden, auf die allgemeine Methode §. 201 zurückzugehen, wenn man zu große Werthe von Z oder BB^1 erhält. Erhält man für y einen imaginären Werth, so ist das ein Zeichen, daß ein Ueberschuß an

Stabilität gegen das Gleiten da ist, und daß es folglich überflüßig ist, dem Fundamente eine größere Höhe zu geben, als die Erfahrung für hinreichend giebt. Erhielte man jedoch für z einen sehr großen Werth, der aber noch nicht so groß ist, daß man für nöthig erachtet, ihn zu verwerfen und zu besondern Befestigungsmethoden zu schreiten, so würde es zweckmäßig sein, nach der Methode §. 200 à posteriori zu untersuchen, ob die Stabilität auch in Bezug auf den Umsturz um die Fundamentbasis versichert ist.

206. Bei der Auflösung der vorigen Aufgaben ist der Boden des Fundamentes als gleichförmig vorausgesetzt; oftmals kommen aber verschiedene Lagen, von größerer oder geringerer Dichtigkeit und bestimmten Eigenschaften vor, durch die das Mauerwerk hindurchgehen muß; die Aufgabe wird dann zusammengesetzter, sobald man annimmt, daß das Mauerwerk bis auf die zweite Lage reicht. Die Bestimmung der Hebkraft, die der obersten Lage zukommt, geschieht nach den vorigen Methoden, aber die des Bruchwinkels, der verschiedenen Punkten der untern Lage zukommt, hängt von einer Gleichung des vierten Grades ab, deren Auflösung durch die Anwendung von geometrischen Verfahrungsarten, die denen §§. 139 ff. analog sind, vereinfacht wird. Es wird aber einfacher und hinreichend genau für die Anwendung sein, die Hebkraft auf der Seitenwand $A^1 D^1$ für die zweite Lage so zu berechnen, als ob sie sich bis zum Niveau des obern Bodens erstreckte, oder als ob sie (§§. 166 ff.) überall gleichmäßig von dem Gewichte der ersten Lage belastet wäre.

Anwendung auf einen besondern Fall des Gleitens.

207. Figur 43 stellt das Profil einer Eskarpe von ungefähr 90^m Länge vor, die im Jahre 1836 an der einen Seite der Bastion 4 zu Soissons erbaut ist. Ihre Fundierung geschah auf einem thonigen, seifenartigen Boden, der durch den Regen erweichte. Als sie im Jahre 1837 mit Erde bis über die Mauerwand angefüllt wurde, schob sie sich nach dem Graben zu, um mehr als $1^m,8$ in der Mitte, vorwärts und neigte sich, genau wie bei den Werken zu Bergues, vermöge ihres eigenen Gewichtes und der Reibung auf ihrer innern Seitenwand, etwas nach hinten. Endlich brach sie bei dieser sehr langsamen Bewegung in der Mitte entzwei, während die

Enden gar keine merkliche Verrückung erfuhren. Das Mauerwerk war zwar weder aus einem einzigen Stücke noch nach demselben Profile ausgeführt. Die alten Theile, die vor der etwa $3^m,5$ tiefen Ausgrabung des Grabens, widerstanden hatten, waren nur durch eine unterirdische Risberme gestützt, die zuerst weichen mußte; da aber dieser, übrigens sehr kurze, Theil bis nach der Epoche von 1837 gestützt blieb, so halten wir es dennoch für nützlich, die Resultate der Rechnung mit denen der Erfahrung bei dieser Gelegenheit zu vergleichen, indem wir von den Hauptdaten ausgehen, welche Lesbros in einem interessanten Berichte an die Comité des fortifications gesammelt hat.

Nach diesen Daten hatte man im Mittel (Figur 42): Oberfläche $ABCD = 45,3$ Kubikmeter, $ICH = 3^{mq},5$, $A^1B^1C^1D^1 = 7^{mq},4$, $B^1G = 15^m,4$, GH oder $h^1 = 0^m,6$, BB^1 oder $Z = 1^m,25$, A^1L^1 oder $z + l = 1^m,4$, C^1D^1 oder $L = 5^m,4$, $\overline{A^1H^1}^2 = 3^{km},92$, $\varepsilon_1 = 45^0$, $p = 1680^k$, $p^1 = 1850^k$, $p_1 = 1500^k$, $f_1{}^1 = 0,34$. Die Werthe der Koeffizienten $f = tg\,\varphi$, $f_1 = tg\,\varphi_1$, der Reibung der Füllerde und der Grabenerde finden sich nicht in dem Berichte von Lesbros angegeben; nach seiner spätern Angabe ist der Winkel $\varphi = 90^0 - \alpha$, lange nach dem Ereignis, indem man die an der Erdbekleidung befindlichen Erde in einen Schubkarren warf, ungefähr $= 36^0$ gefunden, woraus f etwas größer als 0,72 folgt, wofür wir 0,75 nehmen wollen. Coulomb (Memoire vom Jahre 1773) hatte diesen Winkel zwischen 30^0 und 40^0 für die sogenannten seifenartige Erden gefunden; die alten Ingenieure von Bergues, das durch seine Mauereinstürzungen so berühmt geworden ist*), setzen ihn gleich 32 oder 33^0, woraus nur $f = 0,67$ folgt; Vauban giebt endlich (§. 193 Note) die Böschung der Erde gleich 2:1 an, woraus f oder $f_1 = 0,5$, φ oder $\varphi_1 = 26^0 25^1$ folgt. Nimmt man mit Lesbros an, daß bei dem Ereigniße die Erde sehr feucht gewesen ist, so wird man sich wahrscheinlich sehr wenig von der Wahrheit entfernen, wenn

*) Manuskript des **dépôt des fortifications**, ohne den Namen des Verfaßers und ohne Datum, das aber nach 1782 geschrieben sein muß. Nach diesem Manuskripte, das auch von Augoyat in seiner Note über die Ingenieure von Caligny (§. 193 Note) zitiert ist, ist das Gewicht eines Kubikmeters lockerer Erde aus Bergues 1720^k und das des Mauerwerks aus Backsteinen 1860^k.

man f oder $f_1 = 0{,}6$ und φ oder $\varphi_1 = 30^0 58^1$, d. i. α oder $\alpha_1 = 59^0$ nahe annimmt, wofür wir in runder Zahl 60^0 nehmen. Wir wollen aber vorher untersuchen, welchen Einfluß diese verschiedenen Annahmen auf die Resultate haben.

208. Substituiert man die obigen Werthe von p^1, $B^1 G$, GH in die Formel §. 202 für den Druck, so findet man sukzessiv für die Annahme:

$$f = 0{,}6,\ P = 63600^k;\ f = 0{,}75,\ P = 52400^k.$$

Substituiert man ebenso die Werthe von p, ε_1 und $\overline{A^1 H^1}^2$ in den Ausdruck für B (ibid) aber nimmt f_1 nur $= 0{,}6$ oder $\alpha_1 = 60^0$ für die Grabenerde, so findet man

$$B = \tfrac{1}{2} 1500^k . \cos 45^0 \frac{\cos^2 (7^0 30^1)}{\sin^2 (52^0 30^1)} 3{,}92 = 2578^k{,}6;$$

dies giebt für den wirklichen horizontalen Widerstand mit Einschluß der Reibung, welche die vertikale Seitenkraft der Hebkraft auf die Fundamentbasis ausübt (§. 201)

$$B(\cos \varepsilon_1 + f_1{}^1 \sin \varepsilon_1) = 2578^k{,}6 . 0{,}9457 = 2444^k$$

vorausgesetzt, daß hier der Winkel $\psi_1 = \varepsilon_1$ ist. Für die Annahme, bei der die Reibung auf $B^1 H$ und $A^1 H^1$ vernachläßigt wird, beträgt demnach die Hebkraft der Grabenerde nicht einmal den zwanzigsten Theil des Druckes

209. Hätte man die vordere Fläche des Fundamentes nicht böschungsartig abgestuft, sondern sie vertikal gelegt, so wäre der horizontale Widerstand unter denselben Annahmen

$$B = \tfrac{1}{2} p_1 \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2} \alpha_1 . \overline{LL^1}^2 = \tfrac{1}{2} 1500^k . \operatorname{cotg}^2 30^1 . \overline{1{,}4}^2 = 4410^k$$

also beinahe noch einmal so groß geworden. Man erkennt daraus das fehlerhafte der ersten Annahme.

210. Nun veranlaßt das Gewicht des Erddreiecks ICH und des Mauerkörpers eine Reibung der Fundamentbasis $A^1 B^1$,

$$0{,}34 . 1850^k (45^{mq}{,}3 + 7^{mq}{,}4) + 0{,}34 . 1680^k . 3^{mq}{,}5 = 35140^k.$$

Fügt man dieser Reibung den Werth 2444^k der Hebkraft hinzu, so erhält man für den Gesammtwiderstand auf das laufende Meter Eskarpe: 37590^k, welche Zahl, anstatt größer zu sein, als der

Druck, um 26000^k oder doch wenigstens um 14800^k kleiner ist, wenn man über die natürliche Böschung der Füllerde die dem Gleiten ungünstigste Annahme macht.

211. Um sich eine angenäherte Idee von der Einwirkung der Kohäsion bei dem Einsturze, die man am besten bei dem Entwerfen solcher Konstruktionen vernachläßigt, zu machen, muß bemerkt werden, daß die Mauer nicht an einer einzelnen Stelle vorrückte, sondern eine Biegung in ihrer ganzen Länge annahm, so daß sie einen Bogen $LABCM$ (Figur 44) bildete, der vorzüglich an den Punkten A, B, C, also in 4 Theile zerbrach, deren Enden, gehalten durch die, an den Vorsprung und den Schulterwinkel des Werkes stoßenden Theile, sich wenig bogen und den zwischenliegenden Theilen AB und BC als Drehaxen dienten. Der Theorie von der Festigkeit der Materialien zufolge, kann der gleichmäßige Druck von 26000^k oder 14800^k auf den laufenden Meter, der nach dem vorigen auf die untere Fläche $A^1B^1C^1$ der Mauer wirkt, um sie zu zerbrechen, durch die halbe Summe aller ähnlichen Pressungen ersetzt werden, d. h. wenigstens durch eine Gesammtkraft von $\frac{1}{2}14800^k . A^1C^1$ oder $7400 A^1C^1$ Kilog., deren Angriffspunkt in der Mitte B^1 des zerbrochenen Theiles — der als an seinen Enden AA^1 und CC^1 befestigt angenommen werden muß — liegt.

Da die Hälfte dieser Kraft nach bekannten Prinzipien zu gleicher Zeit dem Widerstande das Gleichgewicht halten muß, der an der Oberfläche BB^1 entsteht, und auch dem auf AA^1 stattfindenden, und da ihr Hebelarm $A^1B^1 = \frac{1}{2}A^1C^1$ ist, so folgt daraus, daß ihr Moment:

$$7400^k . \tfrac{1}{2}A^1C^1 . \tfrac{1}{2}A^1C^1 . \tfrac{1}{2}A^1C^1 = 1850\overline{A^1C^1}^2$$

gleich sein muß der Summe der Momente dieser Widerstände, die überdies wegen der fehlenden Symetrie des Mauerprofils verschieden wirken.

212. Da der Widerstand des Mauerwerkes gegen das Zerdrücken ungleich größer ist, als der gegen das Zerreißen, und da dieser letztere allein von der Kohäsion des Mörtels oder von der Reibung der Steine aufeinander herrührt, so muß dieserhalb die vertikale Drehaxe der Bruchtheile AA^1 und BB^1, für den ersten Fall an der äußern Böschung in A und im zweiten Falle in der innern Seitenwand in B^1 liegen. Da aber der Widerstand der

Materialien (welche an der Basis dieser Böschung und an der äußern Grundlage der Fundamente liegen), gegen das Zerdrücken, durch die geringe Größe der Flächen, die dieser Wirkung ausgesetzt sind, bedeutend geschwächt wird, so läßt sich annehmen, daß die Drehaxe etwas nach dem Innern der Fundamentmasse zu liegt: legt man sie in den Fuß der äußern Mauerwand selbst, so kann man die Kompressionskräfte vernachläßigen, denen das Mauerwerk des äußern Vorsprunges unterworfen ist.

Da überdies der Bruch allmählig von demjenigen Punkte aus vor sich geht, der am weitesten von der Drehaxe entfernt liegt, so darf man nach den Hypothesen von Mariotte und Leibnitz, um nicht auf Uebertreibungen zu gerathen, gleichfalls annehmen, daß der Widerstand von verschiedenen andern Punkten der Bruchoberfläche, um so schwächer in Bezug auf denjenigen, welcher am fraglichen Punkte stattfindet, sein wird, je kleiner die Entfernung von der Drehaxe ist.

Nennt man hiernach γ den Widerstand gegen das Zerbrechen für das Quadratmeter des Mauerprofils, B die obere Dicke der Mauer, H ihre Höhe und H^1 die Tiefe des Fundamentskörpers, der ein rechtwinkliges Prisma von der Breite B^1 bilden möge, so findet man nach bekannten Prinzipien, wenn man den Augenblick betrachtet, wo der erste Bruch an der äußern oder innern Oberfläche dieses Körpers sich bildet, für das Moment des Bruches

$$\text{in } BB^1, \ldots \frac{\gamma H^1}{3B^1}{B^1}^3 + \frac{\gamma H}{3B^1}(B+B^1)(B^2+{B^1}^2)$$

$$\text{in } AA^1, \ldots \frac{\gamma H^1}{3B^1}{B^1}^3 + \frac{\gamma H}{12B^1}({B^1}^3 - \tfrac{1}{4}[B^1-B]^3);$$

so daß der Bruch möglich wird wenn

$$1850\,\overline{A^1C^1}^2 > \frac{\gamma H}{3B^1}\Big\{2\frac{H^1}{H}{B^1}^3 + \tfrac{1}{4}(B+B^1)(B^2+{B^1}^2) + {B^1}^3 - \tfrac{1}{4}(B^1-B)^3\Big\}$$

oder:

$$1850\,\overline{A^1C^1}^2 > \frac{\gamma H}{3B^1}\Big\{(B+B^1){B^1}^2 + 2\frac{H^1}{H}{B^1}^3 - \tfrac{1}{2}(B^1-B)B^2\Big\}.$$

In unserm Falle war

$$B=2^m,7,\ B^1=5^m,\ H=11^m,75,\ H^\text{I}=1^m,35,\ B^1C^1=66^m,$$

und die obige Bedingung wird

$$8058600>178,19\gamma \text{ oder } \gamma<45222^k.$$

213. Aus der Tafel §. 58 ersieht man, daß der Widerstand gegen das Gleiten für hydraulischen Mörtel höchstens 180^k für das Quadratzentimeter Oberfläche ist. Der Widerstand gegen das Zerreißen liegt nach verschiedenen Autoren zwischen 80 und 400^k für das Quadratzentimenter von dem gewöhnlich zu Konstruktionen benutzten Mörtel, zwischen 800 und 1900^k für Backsteine und zwischen 1400 und 3100^k für die gewöhnlichen Bausteine. Man muß jedoch beachten, 1) daß es sich dort nur um den augenblicklichen Widerstand handelt, und daß bei einem fortwährenden Einwirken, wie dies bei den Erdbekleidungen der Fall ist, der permanente Widerstand wenigstens auf die Hälfte oder den dritten Theil dieser Größen reduziert werden muß; 2) daß bei dem Mauerwerk aus Bruchsteinen oder aus Ziegeln wenigstens 0,6 der Oberfläche des Profils von den Fugen oder dem Mörtel, und nur 0,4 von den festen Materialien eingenommen werden; sollen daher die letztern, die durch die Reibung und die Kohäsion des Mörtels zusammenhalten, zerbrochen werden, so würde der Widerstand gegen das Zerreißen, für den Quadratdezimeter höchstens $0,4\,.\,\frac{1}{3}3100^k+0,6\,.\,\frac{1}{3}\,.\,400^k=493^k$ bei solidem Mauerwerke und $0,4\,.\,\frac{1}{3}800^k+0,6\,.\,\frac{1}{3}80^k=107^k$ für neueres Mauerwerk aus Backsteinen oder Bruchsteinen, von mittelmäßiger Qualität, sein.

Diese Resultate, die mit 100 multipliziert werden können, damit sie, wie γ, sich auf das Quadratmeter beziehen, müßen wegen Mangel an direkten Versuchen über den Widerstand der Körper gegen den Bruch durch Zerreißen, genügen, um uns bei unserer bisher betrachteten Erdbekleidung zu überzeugen, daß die Kohäsion des Mauerwerkes durchaus nicht das Gleiten auf der Fundamentbasis verhindern konnte. Was die Strebepfeiler betrifft, die man dem Mauerkörper hätte hinzufügen können, die aber hier durch eine gleichmäßige Verstärkung von ungefähr $1^m,08$ ersetzt waren, so glauben wir zufolge der Erscheinungen, die sich 1705 zu Bergues gezeigt haben, und die wir noch später erwähnen werden, daß auch

sie nicht das Gleiten der Mauer und den Bruch in Folge der Ausbiegung verhindert haben würden.

214. Bei den vorigen Rechnungen haben wir die Reibungen vernachläßigt, die auf der innern Mauerwand und der äußern Fundamentböschung entstehen und die gleichfalls den Widerstand gegen das Gleiten verhindern. Bedient man sich zur Berechnung des Druckes und der Hebkaft der Formeln, die in der Anmerkung zu diesem Werke stehen, so könnte man sie leicht unter dieser neuen Annahme finden, wir wollen aber die geometrischen Methoden §§. **143**, **152** und **161** anwenden, die hier schneller zum Ziele führen. Nimmt man nur $f=0{,}6$ als Reibungskoeffizienten für die Füllerde, $f''=0{,}34$ als Reibungskoeffizienten für die innere Mauerwand, endlich $f^1=0{,}6$ als Reibungskoeffizienten für die Böschung A^1H^1, deren Stufen mit Erde bedeckt sind; behält man ferner die übrigen Daten §. **207** bei, so findet man mit hinreichender Genauigkeit

$$P=51520^k \text{ und } B=2690^k$$

für die wirklichen Werthe dieser beiden Kräfte, die hier mit ihren respektiven Seitenwänden spitze Winkel bilden, deren trigonometrische Kotangenten (ibid) **0,34** und **0,6** sind; hieraus findet sich endlich für die horizontale Wirkung des Druckes und der Hebkraft auf den Fundamentboden (§. **201**), nach Abzug oder Hinzufügung der Reibungen, die durch ihre vertikalen Seitenkräfte hervorgebracht werden, die Werthe

$$P(\cos\psi - f_{\mathrm{I}}{}^1 \sin\psi) = 43300^k$$

$$B(\cos\psi + f_1{}^{\mathrm{I}} \sin\psi_{\mathrm{I}}) = 2830^k.$$

Bei den gegenwärtigen Annahmen würde daher die Kraft, welche das Gleiten hervorbringt, nur **43300 — 2830 – 35140 = 5330**^{k} (§. **210**) anstatt **14800**^{k}, d. h. beinahe nur den dritten Theil der letztern, und damit der Bruch des Mauerwerkes erfolge, dürfte die Kohäsion γ dabei höchstens **16300**^{k} für den Quadratmeter betragen; was für neueres Mauerwerk sich annehmen läßt, wo der Mörtel vielmehr das Gleiten auf die Unterlagen begünstigt, als verhindert.

215. Wir wollen jetzt nach der Formel §. **204** die Dicke z suchen, die man dem Mauerfundamente hätte geben müßen, damit das Gleiten unmöglich gemacht wäre.

Nimmt man zuerst nach den direkten Beobachtungen von Lesbros $\varphi=36^0$, $\alpha=54^0$ für die Füllerde an und für die Fundierung $\alpha_1=60^0$, so findet man mittelst der erwähnten Formel, da hier (§. 207)

$$m=14^m,\ \frac{p^1}{p}f_1{}^1L=2^m,059,\ 2f_1{}^1A=21^{mq},976 \text{ ist:}$$

1) für den Fall, wo die Seitenwand A^1H^1 des vordern Vorsprunges um 45^0 geneigt ist

$$y \text{ oder } 14^m,15+z=17^m,946 \text{ und daraus } z=3^m,8$$

als Fundamentdicke.

2) Für den Fall, wo diese Seitenwand vertikal steht

$$y \text{ oder } 14^m,15+z=16^m,617;\ \text{d. i. } z=2^m,47$$

für diese nämliche Dicke.

Diese Resultate, die der Natur der Aufgabe sehr angemeßen scheinen, bestätigen von neuem, was schon §. 194 über die Unzweckmäßigkeit der vordern Böschung, welche Français vorgeschlagen hat, gesagt ist.

216. Nimmt man nun für die Füllerde sowohl, wie auch für die Fundamenterde $\alpha=60^0$, d. i. ungefähr $f=0,6$ an, so findet man, während alles übrige ebenso bleibt: 1) für den Fall eines Vorsprunges mit äußerer Böschung $z=6^m,214$; 2) für den Fall eines Vorsprunges ohne Böschung $z=4^m,68$; diese Resultate sind größer als die vorigen, das zweite ist aber auch hier bedeutend kleiner, als das erste. Die Grabenerde ist hier homogen angenommen, ist dies aber nicht der Fall, so muß man die Rechnungen nach §. 206 modifizieren.

217. Zuletzt wollen wir noch sowohl für die Füllung als für das Fundament annehmen, daß mittlere Erde und mittleres Mauerwerk gegeben sei, für die man gewöhnlich $f=1$ oder $\alpha=\alpha_1=45^0$, p_1 oder $p=\frac{2}{3}p^1$ annimmt. Setzt man überdies $\varepsilon_1=0$ und (§. 57) $f_1{}^1=0,4$, so findet man $z=-0,31--\sqrt{-5,8}$, d. i. einen imaginären Werth, der sehr nahe verschwindet; dies zeigt (§. 202) daß es unnütz wäre, sich hier über die dem Fundamente zu gebende Tiefe, Sorge zu machen.

Diese verschiedenen Beispiele werden hinreichen, um die Art und Weise zu zeigen, wie man sich, in der Anwendung, der For-

mel §. **204** bedienen muß; da man aber unzuläßige Stärken für die Fundamente erhalten kann, und man also zu besonderen Befestigungen seine Zuflucht nehmen muß, so wollen wir annäherungsweise in dem nächsten Kapitel den Einfluß der Widerstände zu finden suchen, die daraus entstehen können.

Von der Zusammendrückbarkeit und der Beweglichkeit des Fundamentbodens.

218. In dem vorigen haben wir den Fundamentboden als fest genug angesehen, um keine Verschiebungen und Bewegungen anzunehmen, die aus der Last des Mauerwerkes und der Wirkung der Seitenpressungen, die sich in großen Tiefen, bei beweglichem Terrain zeigen können, entstehen. Es leuchtet übrigens ein, daß die Wirkungen, die man gewöhnlich der Zusammendrückbarkeit des Bodens zuschreibt, fast immer das Resultat von ähnlichen Verschiebungen sind, und daß die eigentliche Zusammendrückbarkeit nicht zuläßig ist, wo die Erde sich vollkommen gesetzt und keine leere Zwischenräume hat, ausgenommen vielleicht für den Torf, der von Natur elastisch und schwammig ist. Was die schlammigen und seifenartigen Erden anlangt, die durch das Austrocknen sehr zusammenschwinden und erhärten, so hängt ihre Volumensverminderung von einer Ursache ab, die mit den Pressungen in keiner Verbindung steht und die keinen Einfluß auf den Fundamentboden haben kann, der immer feucht und den Veränderungen der äußern Temperatur nicht unterworfen ist. Untersucht man die nämliche Erde in dem Zustande, in dem sie sich befindet, wenn sie frisch aufgelockert und mit Feuchtigkeit, die aus der Filtration nach langem Regen entsteht, gesättigt ist, d. h. mißt man dann ihre Dichtigkeit und ihre natürliche Böschung unter entsprechenden Belastungen und bei gehöriger Menge (§. **193** Anmerkung), — was darauf zurückkommt, daß man den hier so schwachen Einfluß der Kohäsion vernachläßigt —, so wird man um so weniger einem Irrthume ausgesetzt sein, da in diesem erweichten Zustande ihre Wirkung am gefährlichsten ist.

219. Sei *ABCD* (Figur **45**) die Erdbekleidung mit vertikaler innerer Seitenwand, von der schon vorhin (§. **201** ff.) die Rede gewesen ist. Sind die Umstände der Art, daß sie den Bedingungen §§. **106** und **201** genügen, so geht die Mittelkraft der auf di

Erdbekleidung und ihr Fundament wirkenden Kräfte durch den Schwerpunkt V der Fundamentbasis A^1B^1, und kann man diese Mittelkraft im Punkte V in zwei andere zerlegen, von denen die horizontale das Bestreben zum Gleiten hervorruft und durch den Widerstand oder die vordere Hebkraft, selbst abgesehen von der Reibung auf A^1B^1, aufgehoben wird; denn wenn der Fundamentboden sehr beweglich wäre, so könnte er mit dem Mauerwerke ausweichen, und es würde sich dem nur ein geringer Widerstand entgegensetzen. Die vertikale Seitenkraft reduziert sich auf das Gewicht dieses Mauerwerks und des Erdprismas ICH für die Annahme der Figur und bei Vernachläßigung der Reibung auf B^1H; sie muß als gleichmäßig vertheilt auf die ganze Ausdehnung der Basis $A^1B^{1\prime}$ oder als dargestellt durch eine gleichmäßige Ueberhöhung $A'B'B''A''$ von der Dichtigkeit p_1 und der leicht zu berechnenden Höhe $A'A''$, angenommen werden.

Dies vorausgesetzt, wollen wir, zur Auffindung des Stabilitätszustandes des untern Bodens, untersuchen, was mit den verschiedenen Elementen vorgeht, die sich in den ebenen Schichten befinden, welche die äußern Kanten A^1 und B^1 der Fundamentbasis einschließen; wir wollen sie hier vertikal annehmen, sowohl der Einfachheit wegen, als auch, weil bei dieser Richtung das Verhältnis des Druckes zur Hebkraft nahe ein Maximum wird *).

220. Betrachtet man insbesondere die Vertikalschicht HB^1S, und bemerkt, daß es nicht nöthig ist (§§. **149** und **163**) auf die Reibung mit dieser Schicht, deren Elemente als mit der nämlichen virtuellen Geschwindigkeit bewegt angenommen werden, Rücksicht zu nehmen: so hat man zuerst (§§. **143**, **152** ff.) die Kurve der

---

*) Denn da die Erdüberhöhungen, die sich auf beiden Seiten dieser Schichten, von A^1B^1 an gerechnet, befinden, obgleich sie ungleich sind, doch als nahe gleichförmig betrachtet werden können, so wird das angeführte Prinzip eine nothwendige Folge der Bemerkung, die sich §. 163 Anmerkung findet, und nähert sich dem Resultate §§. 167 ff., da, selbst bei einem schrägen Terrain, das Verhältnis des Drucks zur Hebkraft der beiden anliegenden Massen nur durch Faktoren von der Form $1+\frac{2a\sin\gamma}{bT}$ modifiziert wird, die für alle Elemente, welche in derselben Entfernung bT von der als Grenze zwischen diesem Terrain und der Ueberhöhung dienenden, Ebene liegen, unveränderlich sind.

Pressungen zu bestimmen, die sich auf verschiedene Lagen von b auf $B^1 S$, oder auf die entsprechenden Höhen bH beziehen; von diesen Pressungen hat man diejenigen abzuziehen, welche sich auf die Ausdehnung $B^1 H$ beziehen, und die die obige horizontale Seitenkraft bilden, welche als durch die Hebkraft auf $A^1 H^1$ neutralisiert angenommen wird. Darauf suche man nach den Methoden §§. **166** folg. für die nämlichen Lagen des b, die Hebkräfte, welche die Fundamenterde, belastet mit dem Prisma $A'B'B''A''$, in den entsprechenden Höhen $B^1 b^1$ der Wirkung der Pressungen oder der Differenzen der so erhaltenen Pressungen entgegensetzt. Vergleicht man endlich diese respektiven Pressungen und Hebkräfte mit einander, so erkennt man diejenigen Lagen des b, für welche die erstern größer sind als die letztern, und umgekehrt.

Ich will hier nicht weiter bei dieser Vergleichung verweilen, die nach den Verfahrungsarten §§. **127**, **129** und **167** immer leicht ist, da sie es gestattet, elementweise mittelst der Neigung der Tangenten an die Kurven, zu verfahren, d. i. dadurch, daß man die Betrachtungen der Differentialpressungen und der Differentialhebkräfte (§. **104**) an die Stelle der endlichen Pressungen und Hebkräfte substituiert. Die Diskussion zeigt in der That, daß selbst in den günstigsten Fällen der Druck die Hebkraft nur an den Stellen übertreffen kann, die der Fundamentbasis sehr nahe liegen, so daß die darunter liegenden Mauerwerke und Erden vielmehr das Bestreben haben würden, einzusinken, als sich zu heben, wenn die Hebkraft der Füllerde sich dem nicht bedeutend entgegensetzte.

221. Diese Untersuchung gilt nur für die Lagen des b, für die die Fundamentbasis noch zwischen A^1 und B^1 von der Bruchlinie bY geschnitten wird, die hier (§§. **167** und **202**) normal steht auf der Halbierungslinie des Winkels Hbm der natürlichen Böschung der Erde mit der vertikalen Ebene HS, da man keine Rücksicht auf die Reibung mit $B^1 S$ annimmt. Für solche Punkte, wie b^1, deren Bruchlinien $b^1 Y^1$ die vordere Kante A^1 des Fundaments nicht treffen, müßte man die Hebkräfte, die aus dem gesammten in die Höheheben des Mauerwerkes und des obern und untern Bodens, der immer als durch eine einzige Bruchebene begrenzt gedacht wird, entstehen, nach den Verfahrungsarten §§. **147**, **151** ff. suchen, bei deren Anwendung man durch eine sehr einfache geometrische Opera-

tion den Theil $H'NB''A''$ des Belastungsprismas, welches über der Verlängerung I^1Nm der obern Fläche E^1I^1 des Grabens liegt, in ein anderes dreiseitiges gleich großes Prisma b^1Nk^1, dessen Basis auf dieser Verlängerung liegt, verändern, um den Punkt k^1 zu erhalten, von dem die Richtung b^1Y^1 abhängt, u. s. w.*)

Da die so erhaltene Hebkraft à fortiori den Druck auf b^1H, selbst bei sehr geringen Höhen des Mauerwerks, bei sehr großen Höhen der Aufwürfe und bei sehr leicht herabrollender Erde, übertrifft, so scheint es, als ob man nie das fragliche in die Höhe-heben zu fürchten hat. Dies Resultat wird durch die Erfahrung vollkommen bestätigt, und hätten wir dasselbe ohne weiteres annehmen können, wenn wir nicht eine allgemeine Idee hätten geben wollen, wie man diese Art von Aufgaben mittelst unserer Methoden angreifen kann.

222. Jedes in die Höheheben des Mauerwerkes und des untern Bodens ist also im allgemeinen unmöglich und die vertikalen Reaktionen des Bodens gegen die Fundamentbasis A^1B^1 nehmen von der innern Kante B^1 nach der äußern A^1 zu eher ab als zu; hierdurch wird in der festen Masse von rechts nach links ein geringes Bestreben zum Umkippen hervorgerufen, dem die Einwirkung der Reibung auf B^1H, die hier vernachläßigt ist, genügsam das Gleichgewicht hält. Wie wir aber später sehen werden, genügt es nicht, die Unmöglichkeit des in die Höhehebens nach der Länge der Bruchflächen, wie bY und b^1Y^1, darzuthun, sondern man muß sich noch überzeugen, daß die horizontalen und vertikalen Pressungen, denen der untere Boden unterworfen ist, nicht im Stande sind, sie vorwärts zu schieben, indem sie die Grabenerde in die Höhe heben, wie dies bei mehren Umständen vorgekommen ist; dies setzt voraus, daß die Pressungen auf die vertikale Schicht $A'S'$ der vordern Seitenwand des Fundamentes, die entsprechenden Hebkräfte der Grabenerde überwiegen können.

---

*) Sind m^1 und o^1 die respektiven Durchschnittspunkte von $E^1I^1m^1$ mit der Parallele b^1m^1 und der Normale b^1o^1, die beide durch den Punkt b^1 gehen, zur natürlichen Böschung der Erde, so erhält man den Punkt Y^1 der gesuchten Bruchlinie, wenn man nach außen hin auf I^1E^1, $o^1Y^1 = \sqrt{\overline{o^1k^1 . o^1m^1}}$ abträgt und dann die Hebkraft in der Höhe b^1N, indem man Y^1 nach y^1 auf die verlängerte b^1o^1 abträgt, wodurch man $\frac{1}{2}p . \overline{b^1y^1}^2$ als Ausdruck für diese Hebkraft erhält.

223. Beachtet man daher, was (Figur **45**) in der ganzen Ausdehnung dieser Schicht vor sich geht, so wird man für diejenigen Theile $b_1 A^1$, die dem Fundamente nahe liegen, bemerken, daß der Druck vorzugsweise dem Gewicht des Mauerwerkes und des untern Bodens zukommt, dessen Bruch (§§. **166** und **202**) sich nach Richtungen $b_1 X_1$ zu ereignen strebt, welche die Winkel der Vertikale $b_1 A^1$ und der natürlichen Böschung der Erde $b_1 m_1$ halbieren, wenn man auch hier eine gleichförmige Vertheilung der Pressungen nach der Länge von $A^1 B^1$ zuläßt; dadurch kann man diesen Druck direkt nach der Formel §. **166** berechnen, die hier in die folgende übergeht:

$$P = \tfrac{1}{2} p_1 \, tg^2 \tfrac{1}{2} \alpha_1 (z^2 + 2az)$$

wo $z = b_1 A^1$, $a = A'A''$ u. s. w.; während die Hebkraft aus dem Gewichte und der Reibung der Grabenerde entsteht, deren Bruch gleichfalls nach schiefen Richtungen $b_1 Y_1$ zu geschehen strebt, die für ein Profil von beliebiger Form $I^1 E^1 F^1 \ldots$ nach den Methoden §§. **147**, **152** ff. zu berechnen sind, eben so wie die Hebkraft auf $b_1 A^1$, deren Intensität von Element zu Element mit dem Drucke eben so verglichen werden kann, wie dies in Bezug auf die Schicht $B^1 S$ angedeutet ist.

Wir wollen hier den besondern und gewöhnlichen Fall (Figur **46**) betrachten, wo das Grabenprofil durch eine Neigungslinie $I^1 E^1$ begrenzt wird, für welches, wenn $b_1 Y_1$ normal (§. **202**) auf der Halbierungslinie $b_1 X_1$ steht, die Hebkraft auf die ganze Höhe $b_1 H^1 = z + b$, mittelst des Ausdruckes (ibid) berechnet werden kann:

$$\tfrac{1}{2} p_1 \cotg^2 \tfrac{1}{2} \alpha_1 (z + b)^2,$$

wenn b die Fundamenttiefe $A^1 H^1$ ist; hieraus ergiebt sich für die Hebkraft auf $b_1 A^1 = Z$,

$$B = \tfrac{1}{2} p_1 \cotg^2 \tfrac{1}{2} \alpha_1 \left\{ (z + b)^2 - b^2 \right\}$$
$$= \tfrac{1}{2} p_1 \cotg^2 \tfrac{1}{2} \alpha_1 (z^2 + 2bz),$$

deren Intensität besonders dem vorigen Drucke das Gleichgewicht halten muß, damit die Grabenerde nicht zwischen den Bruchlinien $b_1 Y_1$ und $A^1 Y$, in Bezug auf b_1 und auf A^1, sich heben könne.

224. Es ist daher sehr leicht, mit einander die gesamten

oder elementaren Pressungen und Hebkräfte in Bezug auf verschiedene Lagen des Punktes b auf der Vertikale $A^1 S^1$, (die zu Punkten des Bruches X_1 Veranlaßung geben, welche zwischen den Endpunkten A^1 und B^1 der Fundamentbasis liegen, d. i. für welche z oder $A^1 b_1$ nicht größer als $A^1 B^1 \cotg \frac{1}{2}\alpha_1$ wird) zu vergleichen. Will man aber die Untersuchung auch auf Lagen von X_1 ausdehnen, die über der Kante B^1 hinaus liegen, so muß man dann annehmen, daß die virtuellen Brüche sich in gerader Linie durch die Füllmasse verlängern und muß die Untersuchung vernachläßigen, welche aus der Verschiedenheit der Füllerde und des Fundamentbodens entsteht. Man könnte übrigens näherungsweise, wie dies §. **206** angezeigt ist, oder auf jede andere Weise, auf diese Verschiedenheit Rücksicht nehmen, wenn es sich der Mühe lohnte. Die Pressungen, welche demnach sowohl aus dem Gewichte der Erdbekleidung als auch aus dem der benachbarten Erde, bis zu den fraglichen Bruchlinien hin entstehen, könnten auch nach §§. **143** oder **152** ff. gefunden werden, indem man vorher den ganzen Theil der Füllmasse und des Aufwurfes $H'NB''A''$, der über der Ebene $H'E$ sich befindet, in ein gleich großes dreiseitiges Prisma $H'H''E$ verwandelte, dessen Scheitel H'' auf der Vertikale des Punktes A^1 liegt. Allein die Hebkraft wächst so schnell mit der Tiefe des Punktes b_1 unter dem Niveau des Grabens, daß es selten, um nicht zu sagen, nie, nöthig ist, diesen letztern Bruch zu betrachten.

225. In Hinsicht der Pressungen, die sich auf Lagen des b_1 nahe bei A^1 beziehen, muß man nicht vergessen, daß die Formel, welche sie giebt, auf die Annahme einer gleichmäßigen Vertheilung der Pressungen der Länge von $A^1 B^1$ nach gegründet ist, die im Grunde darauf hinaus läuft, daß man das Prisma des Aufwurfs $A'B'B''A''$ in unendlich kleine vertikale Schichten zertheilt denkt, die vermöge ihrer respektiven Gewichte unabhängig von einander auf den Boden wirken. Es leuchtet aber ein, daß diese Schichten im Gegentheile fest mit einander durch die Kohäsion verbunden sind, und daß das Gesetz der Vertheilung des Druckes sehr wenig von ihren einzelnen Gewichten abhängt und sich mit der Natur der Bewegungen, die im Fundamentboden und dem einschließenden Terrain hervorzugehen streben, d. i. mit der Natur, mit der Form und dem Zustande dieses Terrains selbst verändern muß, wie man dies schon

vorhin bei den Theilen der Basis $A^1 B^1$ gesehen hat, und wie man es in der Folge noch beßer bei den Fundierungen auf Sand sehen wird.

In Rücksicht des Momentes wird es genügen, wenn wir die Sache für unsern besondern Fall beweisen, wo der Boden des Grabens als homogen und horizontal angesehen wird.

226. Betrachtet man in der That die Druck- und Hebkräfte für verschiedene Lagen des b_1 auf $A^1 S^1$, so müßen sie sich nicht nur für die ganze Ausdehnung von $A^1 b_1$ das Gleichgewicht halten, sondern auch für jedes Element dieser Höhe, wenn die Vertheilung des Druckes wirklich gleichmäßig ist. Es muß mit andern Worten das Differential von B beständig größer sein, als das von P; dies erfordert (§. 223) daß

$$\cotg^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 (z+b) > tg^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 (z+a)$$

oder daß:

$$\frac{z+b}{z+a} > tg^4 \tfrac{1}{2}\alpha_1$$

sei; diese Bedingung wird nicht erfüllt werden, so lange z und b bestimmte Werthe haben, und nicht zu gleicher Zeit null werden, da $b = A^1 H^1$ der Annahme nach immer ein sehr kleiner Bruch von $a = A' A''$ ist.

Nimmt man z. B. $b = o$, oder die Aufwurfmasse $A'B'B''A''$ mit dem Boden gleich an, so wird der Elementardruck die Hebkraft, bei unserer Annahme der gleichen Vertheilung für alle Punkte des b_1', übertreffen, die über demjenigen liegen, der dem

$$z = \frac{a tg^4 \tfrac{1}{2}\alpha_1}{1 - tg^4 \tfrac{1}{2}\alpha_1} = a . \frac{\sin^4 \tfrac{1}{2}a_1}{\cos \alpha_1}$$

entspricht. Nimmt man dagegen $A^1 B^1$ um die Größe b unter das Niveau des äußern Bodens gesenkt an, so muß man wenigstens

$$b = a tg^4 \tfrac{1}{2}\alpha_1$$

haben, damit dieser Umstand nicht eintrete, selbst für den Punkt, der dem $z = o$ entspricht; d. h. für geringere Fundamenthöhen strebt das der Masse benachbarte Terrain sich zu erheben, oder diese strebt darnach, bis an die durch diese Größe bestimmte Grenze einzusinken.

Nimmt man z. B. $\alpha_1 = 45^0$, $a = 5^m$, so muß b wenigstens

$f = 0{,}0204 . a = 0^m{,}147$ sein, damit für die erwähnten Annahmen Gleichgewicht bestehe. Wir sehen aber in der Wirklichkeit weit höhere Massen, die ohne Fundament auf einen sehr gewöhnlichen Boden gesetzt sind und kein bemerkbares Bestreben zeigen, denselben zur Seite zu schieben; es muß daher der Druck auf die Theile $A^1 B^1$, welche nahe der vordern Kante der Basis liegen, dem Gewichte der entsprechenden vertikalen Schichten der Aufwurfsmasse durchaus nicht gleich sein, sondern ganz oder sehr nahe null sein, so daß er dem Gesetz einer größern oder geringern Progression folgt, je nachdem man sich davon entfernt und dem Schwerpunkte V von $A^1 B^1$ nähert. Dies Gesetz muß vorzüglich von dem der Hebkraft selbst abhängen, dessen Kenntnis aber für unsern Zweck unnöthig ist.

227. Denn sobald die Basis $A^1 B^1$ der Fundamente unter das äußere Niveau um die im allgemeinen sehr geringe Größe $a tg^4 \frac{1}{2}\alpha_1$ eingesunken ist, so läßt sich annehmen, daß diese Basis gleichförmig gehalten wird, und vernachläßigt man im entgegengesetzten Falle den geringen Einfluß der natürlichen Elastizität des Aufwurfsprismas, wenn dieses fest ist, so wie die Seitenerhebung des Bodens, die daraus entspringen kann, die aber die Erfahrung nur unmerklich zeigt; so kann man, selbst für isolierte Prismen, ohne Gefahr für das Maximum des Druckes, der aus ihrem Gewichte entsteht, den nehmen, welcher dem Werthe $z^1 = A^1 V . \mathrm{cotg} \frac{1}{2}\alpha_1$ von z oder $b_1 A^1$, entspricht; für diesen Werth fällt X_1 mit dem Schwerpunkte V zusammen; oder allgemeiner mit dem Angriffspunkte der Mittelkräfte aus den vertikalen Kräften, die auf das obere System wirken.

Ist folglich dieser größte Druck kleiner als die entsprechende Hebkraft auf $b_1 A^1$, d. h. hat man (§. 223)

$$\tfrac{1}{2} p_1 tg^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 (z^{1\,2} + 2 a z^1) < \tfrac{1}{2} p_1 \mathrm{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 (z^{1\,2} + 2 b z^1)$$

$$b > a tg^4 \tfrac{1}{2}\alpha_1 - A^1 V \frac{\mathrm{cotg}\,\alpha_1}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha_1},$$

oder

$$A^1 V > tg\,\alpha_1 \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 (a tg^4 \tfrac{1}{2}\alpha_1 - b),$$

so wird das Prisma, unbegrenzt gedacht nach der Richtung, die normal steht auf der Ebene der Figur, mathematisch gesprochen, gar kein Bestreben haben, einzusinken, oder umzukippen, weshalb das

Gegentheil nothwendig eintreten muß, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist; die obige Grenze von b zeigt genau bei einem solchen Prisma, das immer als isoliert, und mit dem homogenen unbegrenzten horizontalen Boden gleich angenommen wird, die kleinste Höhe des Einsinkens an, die es erreicht. Hätte man übrigens für $b = o$,

$$A^1 V > a tg \alpha_1 \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 tg^4 \tfrac{1}{2}\alpha_1,$$

so würde das Einsinken unmerklich werden, und sich einfach auf die Senkung reduzieren, die der eigenen Zusammendrückbarkeit oder der Beweglichkeit des untern Bodens zukommt.

Es würde für die praktischen Anwendungen unnütz sein, ähnliche Aufgaben noch weiter zu verfolgen *), die noch einige wesentliche Modifikationen nöthig machten, wenn von isolierten, nach allen Seiten hin begrenzten Prismen die Rede wäre. Wir wollen nur bemerken daß man, bei der Gründung einer isolierten Mauer auf einem horizontalen Boden, ihr zweckmäßig einen Unterbau von der Tiefe $b = a tg^4 \frac{1}{2}\alpha$ giebt, selbst wenn angenommen wird, daß man die oft beträchtliche Wirkung des Windes vernachläßigen könne; denn nur dann wird ihre Basis an allen Punkten gleichmäßig getragen.

228. Bis hieher haben wir uns für den allgemeinen Fall der Figuren, Figur **45** und **46** nur mit dem beschäftigt, was sich mit den vertikalen Schichten $B^1 S$ und $A^1 S^1$ ereignet; es leuchtet aber ein, daß eine analoge Diskussion, auf irgend eine zwischenliegende Schicht angewandt, in jedem Punkte den Zustand der Stabilität des untern Bodens kennen lehrt.

Damit die Seitenverrückung von hinten nach vorn, die dieser Boden (§. 222) selbst dann erleiden könnte, wenn das horizontale Gleiten des Fundamentes durch den Zustand der oberen Schichten oder durch beliebige künstliche Mittel verhindert würde, wirklich stattfinde, müßte ein Theil, wie z. B. $B^1 b b_1{}^1 b_1$, der zwischen zwei horizontalen oder geneigten Ebenen $B^1 b_1, b b_1{}^1$ liegt, (angetriebe an seinem hintern Ende durch den Ueberschuß (§. 222) des Drucks

*) Wir müßen aber noch bemerken, daß man bei den Flüßigkeiten, für welche $a = 90^0$ ist, die Stabilitätsbedingung $b =$ oder $> a$ erhielte, die demnach unabhängig ist von dem Werthe des $A^1 V$, oder von den Dimensionen der Basis des Waßerprisma.

der Füllerde über die durch das Mauergewicht u. s. w. hervorgebrachte Hebkraft und an seinem vordern Ende $b_1 b_1{}^1$ durch den umgekehrten Ueberschuß (§. 223) des diesem letzten Gewichte zukommenden Druckes über der Hebkraft der Grabenerde) der Wirkung dieser Kräfte und seines eigenen Gewichtes weichen trotz der Reibungen, die auf seine obere und untere Seite wirken; dies setzt voraus, das ein anderer Theil der Füllmasse, die zwischen zwei durch B^1 und b gehende Bruchebenen enthalten ist, zusammengedrückt würde, während ein letzter Theil der Grabenerde, welche zwischen den durch b_1 und $b_1{}^1$ gehenden Bruchebenen enthalten ist, im Gegentheile, trotz des Widerstandes der obern Lagen, in die Höhe gehoben würde.

Wird die Aufgabe von diesem allgemeinen Gesichtspunkte aus betrachtet, so ist sie nothwendig sehr verwickelt, da sie die vorherige Bestimmung der Richtung der Ebenen $B^1 b_1$ und $b b_1{}^1$ nach einer Methode verlangt, die der analog ist, welche später bei dem Fundieren auf Sand vorkommt. Läßt man aber die Annahme zu, daß in Folge einer besondern Beschaffenheit, einer besondern Beweglichkeit, ohne die, ich wiederhole es, eine solche Bewegung unmöglich wäre, der untere Boden ein natürliches Bestreben hätte, zwischen die obern Lagen zu gleiten, so wird es immer leicht sein, **à posteriori** mittelst des vorigen den Zustand der Stabilität einer solchen Lage nachzuweisen, die unter der Einwirkung von Kräften steht, welche sich an ihr in jeder vertikalen Schicht äußern.

229. Ueberdies setzt die Methode, deren wir uns bisher zur Auffindung des Druckes und der Hebkraft auf die vordern und hintern Schichten, $A^1 S^1$ und $B^1 S$ des Fundamentbodens bedient haben, implizite voraus, daß die entsprechenden vertikalen Ebenen, und folglich die ganze Erdbekleidung sich bestreben, so wie die anliegende Erde vorzurücken, was der Annahme nach für die Theile, welche höher liegen als die Ebene $A^1 B^1$, nicht der Fall ist. Wollte man ganz streng verfahren, so müßte man **à priori** untersuchen: entweder, welches die größte horizontale Wirkung ist, die z. B. an den Theil $B^1 b$ angebracht, im Stande ist, das Herabfallen eines beliebigen Theiles der Füllung zu verhindern, der von zwei, nach Coulomb's Annahmen als eben annehmbaren Bruchflächen begrenzt wird, deren zu bestimmende Richtungen so gegen einander liegen

können, daß sie eine Bogenstützung (arc-boutement) der Art hervorbringen können, wie sie von Niel (**Mémorial de l'officier du génie** Nr. 12, p. 275 und 276) beobachtet ist — oder, welches die kleinste horizontale Wirkung ist, die an $A^1 b$ angebracht, im Stande ist, nach außen hin einen andern Theil der Grabenerde zu bewegen, der gleichfalls von zwei, durch A^1 und b_1 gehenden, nicht parallelen Ebenen begrenzt wird. Ihre Richtung würde direkt bestimmt werden müßen.

Die so aufgefaßte Aufgabe würde neue Schwierigkeiten mit sich führen, aus denen man sich noch durch geometrische Betrachtungen herauswinden könnte. Man erkennt aber **à priori**, daß man, weil zugleich die Reibung auf beiden Bruchflächen in Beziehung auf jeden Fall berücksichtigt werden muß, den Werth des Druckes größer und den der Hebkraft kleiner finden wird, als derjenige ist, der aus den frühern Untersuchungen (§§. **220** und **223**) folgt; man kann sich daher bei den gewöhnlichen Anwendungen an diese letztern halten, die nur als die Differenz zwischen den Druck und Hebkräften betrachtet werden, welche den ganzen Aufwurfhöhen zukommen.

230. Von diesem Gesichtspunkte aus möge dem vorigen noch eine Bemerkung hinzugefügt werden, die sich auf ein Terrain bezieht, daß in seinem obern Theile durch eine unbegrenzte Ebene von beliebiger Böschung (§§. **161** ff.) begrenzt wird; wir wollen aber hier die Anwendung auf den besondern Fall §. **223** (Figur **46**) beschränken, wo die Hebkraft auf die Höhe $b_1 A^1$, die durch die horizontal vorausgesetzte Grabenerde hervorgeht, durch die Formel

$$\tfrac{1}{2} p_1 \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 (z^2 + 2bz)$$

bestimmt wurde, die genau mit derjenigen übereinkommt, welche man erhalten würde (§. **167**), wenn man die obere Grabenschicht, die über die verlängerte Horizontale der Fundamentbasis $A^1 B^1$ hervorragt, wie einen unabhängigen Aufwurf mit gleichförmigem Drucke betrachtet, in welchem der Bruch, wenn keine Reibung da wäre, nach vertikalen Ebenen geschehen würde. Es folgt daraus in der That, daß eine solche Art, die Hebkraft oder den Druck durch die Differenz derjenigen, welche den ganzen Höhen $A^1 H^1$ und $b_1 H^1$ entsprechen, zu berechnen, leicht auf den gewöhnlichsten Fall anzu-

wenden ist, wo die Erde in dieser Lage andere Eigenschaften besäßen, als die des untern Bodens.

Zweites Kapitel.

Von den vorzüglichsten Mitteln, die das Gleiten der Fundamente verhindern.

231. Diese Mittel bestehen bis jetzt in der Anwendung von Lang- und Spundpfählen, äußern Strebepfeilern oder Stützgeschwellen (éperons-butants), Bermen oder Risbermen, Grundbetten oder Grundmauern. Wir erwähnen hier nicht den Balkenrost, den man wohl unter das Fundament legt, jedoch weniger, um dem Gleiten des Bodens entgegenzuarbeiten, als vielmehr dem Bruche des Mauerwerkes, der aus dem ungleichmäßigen Senken und der Beschaffenheit des Bodens entstehen könnte. Wir haben uns hier auch nicht mit den Spundpfählen zu beschäftigen, noch mit den Langpfählen, die zu eigentlichen Trägern gebraucht werden. In Bezug auf diese letztern wollen wir nur bemerken, daß wenn sie in guten Boden, mittelst einer starken Ramme, so weit eingeschlagen sind, daß sie nicht weiter eindringen wollen, sie hinlänglich dem Seitendrucke widerstehen können, wenn man ihnen eine geringe Neigung nach innen zu, etwa $\frac{1}{10}$, giebt; dadurch werden sie verhindert, dieser Wirkung auszuweichen, ohne das Bestreben zu haben, zu gleicher Zeit das ganze Gewicht des Mauerwerkes in die Höhe zu heben, und ohne demnach aus diesem einzigen Grunde, einen Zuwachs an horizontalem Widerstande entgegenzusetzen, der sich zu diesem Gewicht in umgekehrten Verhältnisse der Hebelarme, d. i. wie **1: 10** verhält.

Von den Lang- und Spundpfählen.

232. Wenn sie mit einander verbunden sind. Gewöhnlich werden sie vertikal vor dem Fundamente, und ganz dagegen gerichtet, eingeschlagen, wie Figur **47**, wo sie eine Art ebene feste Wand bilden, die dazu bestimmt ist, die Wirkung derjenigen Erde aufzufangen, die unter oder vor dem Fundamente sich befindet; damit sie aber auch das leisten, was man von ihnen erwartet, müßen sie in

den guten Grund oder wenigstens in eine Schicht eingeschlagen sein, die mehr Widerstand leistet, als die, worauf das Mauerwerk ruht, so daß sie nicht nach der Basis des letztern hin verschoben werden können. Denn sonst würde ihre Fläche nur sehr wenig die Wirkung der Kräfte verändern, welche die Seitenverrückung des Bodens beabsichtigt, wie dies sowohl die Betrachtungen §§. **222** ff. als auch viele Erfahrungen beweisen, bei denen die Pfähle an ihrem untern Ende auswichen. Unter solchen Umständen ist es beßer, wie ein Beispiel bald zeigen wird, die Spundwand hinter dem Fundamente oder dicht vor demselben einzuschlagen, um das Terrain damit einzufaßen, oder um den Strebepfeilern, die mit dem Mauerwerke verbunden sind, zur Stütze zu dien n. Wenn die Langpfähle in eine untere solide Schicht eingerammt werden können, so muß noch der durch diese Schicht der Seitenverrückung der Spundwand dargebotene, Widerstand groß genug sein, um dem Ueberschuß des Druckes über die Hebkraft der obern Theile das Gleichgewicht zu halten. Das Moment dieser Kräfte, in Bezug auf das unterste Ende L der Pfähle, erhält man, nach §§. **151**, **166** ff.; bei der Berechnung des Druckes, der sowohl von dem Gewichte der Erdbekleidung als auch von der Füllerde oder dem Fundamentboden herrührt, muß man überdies die Betrachtungen §§. **223** ff. berücksichtigen.

Ebenso findet man die Momente oder den Ueberschuß der Momente, die der untern Schicht zukommen, indem man (§§. **206** und **230**) annimmt, daß diese Schicht entweder gleichförmig von dem Gewichte der obern Theile belastet, oder daß sie bis zu ihrer natürlichen Grenze verlängert sei. Dividiert man endlich den Ueberschuß der Momente in Bezug auf die Hebkraft über diejenigen, die sich auf den Druck gegen die Lang- und Spund-Pfähle beziehen, durch den Hebelarm $A^1 L$, bezogen auf die vordere Kante der Fundamentbasis, so erhält man den Werth des Ueberschußes an Widerstand, den ihre Wand in A^1 dem horizontalen Verrücken der Mauer entgegengesetzt, zugleich mit der Hebkraft auf $L^1 H^1$ oder $H I^1$.

233. Wenn der Boden vor den Pfählen durch die horizontale Ebene $E^1 I^1$ begrenzt ist, wenn man die Reibung auf die vordere und hintere Fläche der Pfähle vernachläßigt, und wenn man zugleich annimmt, daß dieselben genugsam in die untere solide Schicht eingedrungen sind, damit ihr unteres Ende der Seitenverrückung wider-

stehen könne, und dem Umsturze zur Drehung dient, so wird die Frage einfach genug, um direkt der Rechnung unterworfen werden zu können.

Behält man die Bezeichnungen §. 223 bei, und nennt ferner L die ganze oder reduzierte Länge LL^1 der Pfähle, l die Entfernung L^1H^1 ihres Kopfes von der Horizontalen E^1I^1, z^1 die Höhe $A^1L=H^1L-A^1H^1=L+l-b$ derjenigen Fläche, die der Einwirkung eines Druckes unterworfen ist, der sowohl aus dem Gewichte der Fundamenterde, als aus dem des Mauerwerkes, entsteht, das durch eine gleichförmige Belastung von der Höhe $a=A'A''$ und der Dichtigkeit p_1 dargestellt ist: dann hat man 1) für die Berechnung der Intensität dieses Druckes für den laufenden Meter (§. 223) und für den Hebelarm in Bezug auf den Punkt L (§. 168) die respektiven Formeln:

$$P=\tfrac{1}{2}p_1 tg^2\tfrac{1}{2}\alpha_1(z^{1\,2}+2az^1),\ \tfrac{1}{3}z^1\frac{z^1+3a}{z^1+2a},$$

indem man jedesmal annimmt, daß die Höhe $z^1=LA^1$ nicht (§. 224) größer ist als $A^1B^1.\text{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha_1$;

2) zur Berechnung der analogen Intensität und des Hebelarms der Hebkraft auf die ganze Höhe $LL^1=LH^1-L^1H^1$ der Pfähle

$$B=\tfrac{1}{2}p_1\,\text{cotg}^2\tfrac{1}{2}\alpha_1(L^2+2lL),\ \tfrac{1}{3}L\frac{L+3l}{L+2l};$$

hieraus erhält man zur Bestimmung des horizontalen Widerstandes X für den laufenden Meter, den die Wand LL^1 in Folge ihrer Drehung um L, in A^1 entgegengesetzt, die Formel:

$$X.LA^1=\tfrac{1}{3}L\frac{L+3l}{L+2l}B-\tfrac{1}{3}z^1\frac{z^1+3a}{z^1+2a}P,$$

oder:

$$X=\tfrac{1}{6}\frac{p_1}{z^1}\left\{\text{cotg}^2\tfrac{1}{2}\alpha_1 L^2(L+3l)-tg^2\tfrac{1}{2}\alpha_1 z^{1\,2}(z^1+3a)\right\}.$$

234. Nimmt man an (Figur 48), daß die vertikale Wand LL^1 weit genug vor der Erdbekleidung steht, damit die Seitenpressungen, die aus dem Gewichte der letztern und aus dem Drucke, den dieselbe auszuhalten hat, entstehen, nicht durch den dazwischenliegenden,

horizontal angenommenen, Boden sich fortpflanzen können — was sich immer leicht nach Betrachtungen, die denen §§. 264 ff. analog sind, erkennen läßt —; so wird diese Wand an der hintern Seite allein der Wirkung eines horizontalen Druckes unterworfen sein, dessen Intensität, und dessen Hebelarm man erhält, wenn man in den obigen Formeln $a=l$ und $z^1=L$ setzt, und man erhält, wenn man auch ferner die beliebige Höhe $z^1=LA^1$ annimmt, für den Hebelarm des Widerstandes X dieser Wand:

$$P=\tfrac{1}{2}p_1 tg^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 (L^2+2lL),\; B=\tfrac{1}{2}p_1 \cot g^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 (L^2+2lL)$$

$$B-P=2p_1 \frac{\cot g\,\alpha_1}{\sin\alpha_1} L(L+2l)$$

$$X=\tfrac{2}{3}\frac{p_1}{z^1}\frac{\cot g\,\alpha_1}{\sin\alpha_1} L^2(L+3l)=\tfrac{2}{3}p_1 f_1\sqrt{1+f_1{}^2}\,\frac{L^2(L+3l)}{z^1}.$$

235. Diese letztern Resultate setzen immer voraus, daß die Pfahlwand in ein Terrain eingerammt sei, das fest genug ist, um der Drehung zur Drehaxe zu dienen; dies erfordert, daß der horizontale Widerstand Z in L wenigstens der absoluten Differenz $B-P-X$ der Kräfte gleich sei, die auf beide Seiten der Wand LL^1 wirken, indem man darin für X den obigen Werth setzt; oder daß man habe:

$$Z>2p_1\frac{\cot g\,\alpha_1}{\sin\alpha_1}L^2\left(1+\frac{2l}{L}-\frac{l}{z^1}-\frac{L}{3z^1}\right).$$

Wäre diese Bedingung bei einem homogenen Boden nicht erfüllt, so würde der, durch die Wirkung der in A^1 angebrachten Kraft X herbeigeführte Umsturz um irgend einen andern Punkt S von LL^1 geschehen, dessen Lage durch die Bedingung bestimmt wird, daß die Resultante aus den Kräften, welche aus diesem Umsturze entstehen, gleich und entgegengesetzt sei der Kraft X, dessen Moment andererseits gleich sein muß dem derjenigen Kräfte, welche der Länge von L^1S nach wirken, plus dem derjenigen Kräfte, die im entgegengesetzten Sinne auf den untern Theil LS wirken.

236. Ueberlegt man die zusammengesetzte Natur der virtuellen Bewegungen, die in der, diesem untern Theile benachbarten, Erdmasse vorzugehen streben, so kann man schwerlich zugeben, daß die Druck- und Hebkräfte auf jedes Element der vordern oder hintern

Oberfläche, denselben Gesetzen folgen, als für die Elemente des obern Theiles. Man muß vielmehr glauben, daß die, an diesen Theil grenzenden, Massen, anstatt das Bestreben zu haben, der Länge der, an der obern Bodenoberfläche endenden, Bruchlinie nach unter den Winkeln $\frac{1}{2}\alpha_1$ und $90^0 - \frac{1}{2}\alpha_1$ herabzusinken, nur eine einfache Verrückung von hinten nach vorne erleiden, die nach dem von Coulomb angenommenen Prinzipe eine geringere Aufwendung von Kraft erfordert. — Da aber hier nur von einer ungefähren Annäherung die Rede ist, und wir den Einfluß der Kohäsion der Erde und ihrer Reibung auf LL^1 vernachläßigen, so kann man die Ausdrücke für den Druck und die Hebkraft beibehalten.

Unterwirft man daher der Rechnung die oben (§. 235) angegebenen Gleichgewichtsbedingungen, so wird man zur Bestimmung des Widerstandes X, den die Pfähle im Punkte A^1 (Figur 48) leisten, und zur Bestimmung der Entfernung $L^1S = s$, des Drehpunktes S vom Scheitel L^1 die Gleichungen erhalten

$$X = 2m(s+l)^2 - mc^2 - 2ml^2,$$
$$X(s \mp l^1) = mc^2(s+l) - \tfrac{2}{3}md^3,$$

in denen der Kürze halber

$$m = 2p_1 \frac{\cot g\,\alpha_1}{\sin\alpha_1},\ c^2 = (L+2l)L,\ d^3 = (L+l)^3 - l^3$$

gesetzt ist; wo ferner alle vorigen Annahmen und Bezeichnungen beibehalten sind, und $\mp l^1$ die Entfernung des beliebigen Punktes A^1 unter oder über dem obern Ende L^1, von der festen Wand LL^1, die in gewissen Fällen über die Horizontale E^1H^1 des Bodens hinaus verlängert werden könnte, bezeichnet.

Eliminiert man X aus diesen Gleichungen, so erhält man für die Bestimmung von s, oder der Lage von S die Gleichung:

$$(s+l)^2(s \mp l^1) - \tfrac{1}{2}(c^2+2l^2)(s \mp l^1) - \tfrac{1}{2}c^2(s+l) + \tfrac{1}{3}d^3 = 0,$$

die nur durch sukzessive Annäherungen gelös't werden kann.

237. Läge der Angriffspunkt A^1 der Kraft X sehr weit von dem untern Ende L der Wand LL^1, so könnte die Intensität dieser Kraft vernachläßigt werden im Vergleiche zu den Intensitäten der Kräfte, welchen sie in der ersten der obigen Gleichungen das Gleichgewicht hält, und die demnach angenähert den Werth

$$s+l=\sqrt{{}^1\!/_2 c^2+l^2}$$

oder

$$s=-l+\sqrt{{}^1\!/_2 c^2+l^2}$$

gäbe, der nothwendig etwas zu gering ist, und dessen man sich dann bedienen könnte, um sukzessive genauere Werthe zu erhalten. Für unsern Zweck genügt es jedoch, einen sehr einfachen besondern Fall zu untersuchen, der in der Anwendung häufig vorkommt.

Wir wollen annehmen, daß die Pfahlköpfe über das Niveau des obern Bodens hinausragen, und daß zugleich der Angriffspunkt der Kraft X in der Höhe dieses Niveaus liege. Unter diesen Annahmen erhält man

$$l=l^1=0,\ c=d=L \text{ und } s^3-L^2s+\tfrac{1}{3}L^3=0$$

$s=\frac{1}{2}\sqrt{2L}=0{,}707\,L$ als erste Annäherung, daraus dann $s=0{,}743\,L$ hinreichend genau, und für den entsprechenden Werth von X

$$X=2p_1\frac{\cot g\,\alpha_1}{\sin\alpha_1}(2s^2-L^2)=0{,}208\,p_1\frac{\cot g\,\alpha_1}{\sin\alpha_1}\,.\,L^2.$$

Sei wie §. 207, $p_1=1500^k$, $\alpha_1=60^0$, und ferner $L=4^m$, so erhält man für den Widerstand in der Höhe des Bodens, $X=0{,}280\,.\,1500\,.\,\frac{2}{3}16=3328^k$, für das laufende Meter der Spundpfähle oder der Pfahlwand. Bleibt alles, wie vorhin, und nimmt man nur $\alpha_1=63^0\,35^1$ oder $f_1=0{,}5$, wie dies Vauban für gewisse Gegenden beobachtet hat, so müßte man den Bruch $\frac{2}{3}$ durch 0,559 ersetzen, und dann würde $X=2793^k$. Man sieht, daß bei beweglichen oder seifenartigen Gegenden, dieser Widerstand sehr schwach sein würde.

Nimmt man im Gegentheil den Winkel α_1 der natürlichen Böschung der Erde $=45^0$ an, so wird der trigonometrische Faktor von X gleich $\sqrt{2}$, und man erhielte unter denselben Annahmen $X=7055^k$, welcher Werth über das doppelte die vorigen Werthe übertrifft.

238. Wenn endlich die Pfähle in einen festen Boden eingerammt wären, so daß die Drehung nahe bei L geschehen würde, so erhält man unter denselben Umständen (§. 234)

$$X=\tfrac{2}{3}p_1\frac{\cot g\,\alpha_1}{\sin\alpha_1}\frac{(L+3l)}{z^1}\,L^2=\tfrac{2}{3}p_1\frac{\cot g\,\alpha_1}{\sin\alpha_1}L^2$$

und der Widerstand würde ungefähr in dem Verhältnis von 0,208 zu $\frac{2}{3}$ oder von 1 zu 3,2 vermehrt sein. In Bezug auf den Fall Figur 47 haben wir schon bemerkt (§. 232), daß es nicht vortheilhaft sein würde, sich hier einer Spundwand zu bedienen, um das Fundament zu sichern, um so mehr, als hier die zuletzt erwähnten Umstände stattfinden würden, die den Gebrauch der Formel des §. 233 zulaßen, um ihren Widerstand X auf das laufende Meter zu berechnen.

239. Wenn die Spund- und Langpfähle einzeln stehen. Es scheint nicht leicht zu sein, streng die Erscheinung der Terrain-Bewegungen zu analysiren, die um einen einzelnen Pfeiler herum, der einer horizontalen Verrückung nach einer gegebenen Richtung hin unterworfen ist, vor sich gehen, und somit auf hinreichend genäherte Ausdrücke zu gelangen, selbst, wenn man die Kohäsion der Erde und ihre Reibung mit diesem Pfahle vernachläßigt. Läßt man insbesondere die Annahme zu, daß der Widerstand für jedes vertikale Oberflächen-Element derjenige sei, der bei der Annahme, daß der Pfahl einer proportionalen Ausdehnung oder Zusammenziehung in allen seinen Theilen unterworfen sei, stattfindet, so würde man nicht etwa prismatische Elemente der Füllung, sondern konische zu untersuchen haben, die zwischen zwei auf einanderfolgende Meridianebenen eingeschloßen sind, und deren Normaldruck demzufolge nach der Richtung der wirklichen Verrückung des Pfeilers zerlegt werden müßte: die Auffindung des Maximums des Druckes oder der Hebkraft nach §§. 1 ff. würde also von einer Gleichung des dritten Grades in Bezug auf $tg\,v$ abhängen, selbst in dem einfachsten Fall, wo der Boden homogen und horizontal ist.

Diese Betrachtung, verbunden mit der Ungewißheit und selbst der Uebertreibung der Annahme, bestimmt mich, die Resultate dieser Analyse nicht mitzutheilen, und einfach *) für den Normalwiderstand jedes vertikalen Elementes eines Pfahles, vom Halbmeßer r, das Produkt der obigen Werthe von X in die Breite dieser Elemente anzunehmen; diese Kraft, die nach der Richtung der Verrückung des

---

*) Ist von vollkommenen Flüßigkeiten die Rede, so wäre $\alpha_1 = 90^0$, $\cotg \alpha_1 = 0$, $\cotg \frac{1}{2}\alpha_1 = tg\,\frac{1}{2}\alpha_1 = 1$ und folglich $X = 0$, oder der Druck gleich der Hebkraft, wie dies auch der Fall sein mußte.

Pfahles wirkt, führt, wenn man sie integriert, auf den Totalwiderstand $2rX$.

Um also den Widerstand eines isolierten Pfahles zu erhalten, multiplizire man seinen mittlern Durchmeßer mit dem Widerstande, den man nach den Formeln §. 233 ff. für das laufende Meter Spundpfähle oder Spundwand unter denselben Umständen erhält. Hiernach würde ein Pfahl, dessen Durchschnitt ein Quadrat ist, denselben Widerstand gegen eine Seitenverschiebung leisten, wie ein runder Pfahl von derselben horizontalen Breite; dies Resultat, das aus der Natur der gemachten Annahmen sich ergiebt, muß noch durch direkte Erfahrungen bestätigt werden, da es à priori scheint, als ob der Widerstand in dem letztern dieser beiden Fälle, kleiner sein müße.

240. Ist z. B. der mittlere Durchmeßer eines Pfahles $0^m,25$, und letzterer 4^m tief eingerammt, so findet man unter den Annahmen §. 237, $X = 0,25 . 3328^k = 832^k$, oder $X = 0,25 . 2793^k = 698^k$ für schlechtes Terrain, und für Erde wo $\alpha_1 = 45^0$ ist, über das doppelte, nämlich $X = 0,25 . 7056^k = 1764^k$.

Bei den Versuchen, die zu Grenoble von Gay mit einem $6^m,6$ langen, $0^m,78$ im Umfange, oder $0^m,248$ im Durchmeßer haltenden Pfahle vorgenommen sind, der in einen homogenen, schlammigen und sehr weichen Boden eingerammt war, fand sich der horizontale Widerstand $= 750^k$ für die erste Vorrückung, und $= 1440^k$ für eine Bewegung von $0^m,016$ in 10 Minuten. Da die Widerstände (§. 237) wie das Quadrat der Pfahlhöhen wachsen, und der Pfahl hier sehr nahe denselben Durchmeßer, wie in dem vorigen Beispiele hat, so sieht man, wenn die nämlichen Umstände unter andern Verhältnissen angenommen werden, daß der Widerstand nach unsern Formeln wenigstens $\left(\frac{6,6}{4}\right)^2 = 2,7$ mal 698^k oder 1885^k sein müßte; das überwiegende dieses Resultates über dem der Erfahrung könnte vielleicht durch die besondere Natur des Bodens, die Art der Versuche u. s. w. erklärt werden, worüber wir die nöthigen Einzelnheiten nicht kennen; schöbe man es aber allein auf die Ungenauigkeit der Formel, so würde man einen Reduktionskoeffizienten 0,4 oder höchstens 0,5 daraus erhalten.

Aeußere Strebepfeiler oder Stützgeschwelle.

(éperons butants.)

241. Häufig hat man den Vorschlag gemacht, und mitunter ihn auch zur Ausführung gebracht, dem Gleiten des Fundamentes in glücklichen Fällen durch eine Konstruktion aus Holz oder Mauerwerk, in der Art Figur **49**, entgegenzuwirken. Die Entwürfe für Bergues liefern darüber Beispiele jeder Art; hier soll jedoch nur von den Stützgeschwellen von Mauerwerk die Rede sein, da sie ökonomischer und dauerhafter sind. Diesen giebt man gewöhnlich 2^m horizontale Breite bei **1** bis 2^m Dicke und **10** bis 20^m Zwischenraum von Mitte zu Mitte. Zuweilen werden diese Stützgeschwelle bis an den Fuß der Kontreskarpe, die ihnen genugsame Stütze darbietet, verlängert, zuweilen erhalten sie nur eine kleine Länge und werden dann am äußern Ende durch Lang- uud Spundpfähle gehalten; allein eine solche Anordnung würde wenig vortheilhaft sein, wenn dies Ende auf einem eben so beweglichen Boden, wie das Fundament ruhte; die bei der Befestigung von Bergues vorgekommenen Erscheinungen haben dies deutlich gezeigt.

242. Die Stützgeschwelle müßen immer in Form von umgekehrten Gewölben mit Sorgfalt ausgeführt werden, d. h. es müßen die Steine auf die schmale Seite gelegt werden, um ihr Gleiten und Herausfallen unter der Wirkung des Druckes zu verhindern; sie müßen der Biegung und dem Zerbrechen widerstehen können; ihre Entfernung und ihre transversalen Dimensionen müßen hiernach berechnet werden, so wie darnach, daß die Bekleidungen der Eskarpe und Kontreskarpe in den mittlern Theilen nicht brechen können, wovon man sich nach §§. **211** ff. versichern kann. Sind sie bis zur Kontreskarpe verlängert, so darf der auf den Fuß der letztern ausgeübte Druck nicht denjenigen übertreffen, der ihrer Höhe zukommt, da sonst die Stabilität gefährdet würde. Im allgemeinen erfordert die Oekonomie, daß der Widerstand an dem äußern Ende des Stützgeschwelles im Verhältnis stehe zu der Intensität derjenigen Kraft, welche an dem andern Ende wirkt; von diesen verschiedenen Gesichtspunkten aus kann es zweckmäßig sein, sie in den Anfang von vertikalen zylindrischen Gewölbstücken enden zu laßen, die sich an die Mauerfundamente, oder an den Fuß der Böschung der Stützmassen anlehnen.

Die frühern Untersuchungen setzen uns in den Stand, diesen verschiedenen Bedingungen zu genügen, da sie das Mittel darbieten, näherungsweise die Differenz zwischen Druck- und Hebkraft für verschiedene Punkte, ohne Berücksichtigung der Reibung zu berechnen. Um daher unnütze Wiederholungen zu vermeiden, wollen wir uns hier darauf beschränken, den Weg anzuzeigen, den man verfolgen muß, um die Anzahl und die transversalen Dimensionen der Stützgeschwelle zu finden.

243. Sei b die horizontale Breite, e die Dicke, l die Länge und n die Anzahl dieser Stützgeschwelle für eine gegebene Länge L der Erdbekleidung, p^1 das Gewicht eines Kubikmeters Mauerwerk, aus denen sie bestehen, und Π die Grenze der Last auf den Quadratmeter, unter der sie zerbrechen können; ist dann R der Unterschied zwischen Druck- und Hebkraft, so muß man zuerst wenigstens haben:

$$n \Pi b e = R.$$

Anderseits muß man, um den Bruch desjenigen Theiles der Erdbekleidung zu verhindern, der zwischen zwei auf einander folgenden Stützgeschwellen, deren Entfernung $\frac{1}{n} L$ ist, liegt, gleichfalls haben (§. 212):

$$\frac{1}{8n^2} R L < \frac{\gamma H}{3B^1} \left\{ (B+B^1)B^{1^2} + \frac{2H^1}{H} B^{1^3} - \tfrac{1}{2}(B^1-B)B^2 \right\};$$

hieraus läßt sich die Fläche $b.e$ und die Zahl n finden, wenn man für Π und γ Werthe festgesetzt hat. Π darf nicht über 50000^k für Mauerwerk aus gewöhnlichen Bruchsteinen, und γ, welches die Grenze der Last bedeutet, unter der dieselben Materien zerreißen, nicht über 10000^k bis 15000^k genommen werden (§. 213).

244. Bei diesen Rechnungen muß man jedoch auf die durch die Kraft R (in Folge des leeren Raumes, der durch die Stützgeschwelle in der Grabenerde gebildet wird) hervorgerufenen Vermehrung des erhaltenen Werthes Rücksicht nehmen; es sei denn, daß man gleichfalls auf die Verminderung Rücksicht nimmt, die sie am entgegengesetzten Ende durch die Reibung erfährt, welche dem Gewichte dieser Stützgeschwelle und den auf ihre Seitenfläch n ausgeübten Pressungen zukommt u. s. w.

Unter gewissen Verhältnissen kann es vortheilhaft sein, ihnen eine pyramidalische Form mit breitem Kopfe zu geben, der sich an Gewölbstücke lehnt, oder auch nicht; Figur 50 zeigt dies im Grundriße und im Profil.

Diese Mittel sind jedoch, ich wiederhole es, wenig wirksam bei einem Boden, der beweglich genug ist, um durch die Wirkung der, unter dem Fundamente sich entwickelnden, Kräfte in die Höhe gehoben zu werden, und man muß auf energischere Mittel denken, von denen bald die Rede sein wird, wenn man dem Mauerwerke dieses Fundamentes keine passende Wurzel geben kann (§. 204).

Risbermen, Grundmauern oder Grundbetten.

245. Der größte Theil der bei den Wällen von Bergues ums Jahr 1778 eingetretene Ereignisse, rührt von der Abschaffung oder Verkleinerung der Erdbermen her, welche die alten Ingenieure vor ihrer Basis gelaßen hatten, um dem Drucke entgegen zu wirken, und die oft die Höhe der Eskarpen, die beinahe überall ohne Brustwehr blieben, um 6,9 selbst 13 Fuß verminderten. Man bemerkte stets, daß in der Masse, wie die Erde dieser Bermen auf der Oberfläche erhöht wurde, um damit den Wall wieder zu erhöhen, dieser sich senkte, die Erdbekleidung nach vorne hinglitt, sich ganz nach hinten zu neigte und sich von ihren Strebepfeilern trennte, die ihrerseits in den Boden einsanken, während die Berme sich erhob und nach dem Scheitel und der Basis zu sich ausbreitete. Die Pfähle, die vor und hinter dem Fundamente eingerammt waren, setzten diesen Bewegungen nur ein schwaches Hindernis entgegen; oftmals, wenn sie nicht in festen Boden eingedrungen waren, neigten sie sich sogar nach der Erdfüllung hin.

Die Figur 51 bezieht sich auf eins der vorzüglichsten Ereignisse: sie stellt eine Erdbekleidung mit Strebepfeilern dar, die um die erwähnte Zeit statt einer Mauer der alten Befestigung des Hafens Honscot erbaut wurde, und bei der sich ähnliches ereignete. Trotz der doppelten Reihe von Lang- und Spundpfählen, die (236) nur bis zur obern Fläche des Fundamentes gingen, ungeachtet der Tiefe von 6 bis 7 Fußen, die man dem Fundamente gegeben hatte, endlich ungeachtet der großen Ausdehnung der innern Grundmauer BNN^1B^1, fing das ganze an sich zu biegen, sobald man anfing,

die Brustwehr aufzuwerfen und man mußte eilig diese Brustwehr bis an die Horizontale der obern Mauerkante abtragen, und den Graben nach dem Profile $I^1E^1F^1$ anf eine Höhe von ungefähr 9 Fuß über seinem Niveau aufwerfen.

246. Der anonyme Verfaßer des §. 207 Anmerkung zitierten Memoires, bemerkt über diese Ereignisse, daß, wenn man vor der innern — bis an den Fundamentboden nach B^1, und bis an das äußere Profil der Brustwehr, nach H verlängert gedachten — Mauerwand B^1H ein dreiseitiges Erdprisma B^1Ha behielte, dessen horizontale Basis sich auf den äußern Boden stützte, und dessen äußere Fläche aH die Verlängerung, der natürlichen Böschung IHE der Erde wäre, so würde die Reibung dieses Prisma in jedem Punkte der Höhe B^1H dem horizontalen Drucke der Masse das Gleichgewicht halten, die sich inwendig, nach der Füllung zu, an dasselbe stützte; so daß es genügen würde, dem Mauerfundamente, eine Basis und eine Last zu geben, die gleich wären der Basis und dem Gewichte des nämlichen Prisma, um das Gleichgewicht gegen die Wirkung des Drucks der Erde herbeizuführen. Dieser Bedingung sucht der Verfaßer dadurch Genüge zu leisten, daß er das Fundament nach dem Innern der Füllung zu unter der Form einer allgemeinen Grundmauer A^1N^1NA erweitert.

Allein diese Auflösung und die Roisonnements sind aus mehren Gründen mangelhaft: 1) kann nämlich der Druck auf BH_1 und selbst die Ungleichheit der Pressungen oder Widerstände auf A^1N^1 hinreichen, um den Bruch nach BB^1 und darauf das Gleiten auf A^1B^1 zu entscheiden; 2) ist die Reibung des Mauerwerkes auf dem Boden allgemein kleiner als die der Erde auf einander (§. 207); 3) endlich ist der Widerstand eines Erdprismas aB^1H auf verschiedene Elemente der Höhe B^1H nicht einfach dem Druck auf diese Elemente gleich, sondern er ist weit größer als dieser und zwar um eine Größe, die nach unsern Prinzipien für jede Form der Ausfüllung B^1HEF leicht gefunden werden kann.

247. Denn sei bh eine beliebige vertikale Schicht des Erdprismas aB^1H, bis zur mittlern und obern Horizontale EEo der Erdfüllung, nach g, verlängert gedacht; seien o und k die Durchschnitte dieser Horizontale und der Böschung aE mit der Normale, die von b auf diese Böschung herabgelaßen wird; nimmt man fer-

ner auf bo, $ox = oh$, so wird vorausgesetzt (§. 230), daß man hier keine Rücksicht auf die Reibung mit der Schicht bh Rücksicht zu nehmen braucht, und es wird der Druck auf die Höhe dieser Schicht (§. 101) gleich sein $\frac{1}{2}p.\overline{bx}^2$, und folglich kleiner als $\frac{1}{2}p.\overline{bk}^2 = \frac{1}{2}\overline{bh}^2.\sin^2\alpha$, wenn α der Winkel der Böschung aE mit der Vertikale ist. Auf der andern Seite ist das Maaß der Reibung auf die Basis ab des Prismas:

$$= \text{cotg}\,\alpha \,.\, p \,.\, \text{Oberfl.}\; abh = \tfrac{1}{2}p.\overline{bh}^2;$$

augenscheinlich wird diese Größe die vorige um so mehr übertreffen, je kleiner α ist, was auch übrigens bh für eine Lage, und die zu haltende Erde für eine Höhe B^1H haben mögen; denn setzt man die letztere selbst unendlich groß, so würde höchstens $bx = bk$. Es kann einen deshalb nicht überraschen, wenn man sieht, daß das kleinste, an den Fuß a der Böschung aE stoßende, Prisma genügt, um der Wirkung der daran liegenden Erde zu widerstehen, und daß eine Hinwegnahme das Einfallen der entsprechenden ganzen obern dünnen Schicht nach sich zieht.

Was von dem beliebigen Prisma abh gesagt ist, kann auch auf jedes andere Prisma a^1b^1h angewandt werden, das jenem parallel ist und durch dieselbe Vertikale und dieselbe äußere Böschung begrenzt wird; man darf aber daraus nicht schließen, daß dessen wirklicher horizontaler Widerstand gemeßen wird durch das Produkt $\frac{1}{2}p,\overline{b^1h}^2$; denn man weiß (§. 148), daß die Hebkraft auf die Höhe b^1h nicht dem Prisma zukommt, dessen horizontale Basis b^1a^1 ist, sondern dem Prisma ab^1h, dessen Basis im Fuße a der äußern Böschung endigt. Zieht man durch den Punkt h die Parallele hy^1 zur Bruchlinie ab^1, die in y^1 die Verlängerung der Normale b^1k^1 auf diese Böschung trifft, so wird die Hebkraft auf die Höhe b^1h die Größe (§§. 141 und 148) $\frac{1}{2}p.b^1k^1.b^1y^1$ haben und also kleiner sein als $\frac{1}{2}p.\overline{b^1h}^2$, aber größer als der Druck $\frac{1}{2}p.\overline{b^1x^1}^2$ auf diese nämliche Höhe; die Bestimmung von b^1x^1 in diesem Ausdrucke geschieht analog wie die von bx auf bo.

Man wird indes bemerken, daß diese Werthe für den Druck und die Hebkraft um so weniger von einander abweichen, als der Punkt b' dem Punkte h näher liegt, so daß sie in h einander gleich sind, und also die kleinste Kraft wie dies auch à priori deutlich ist,

die Verrückung der Mauern zur Folge hat. Die Stabilität nimmt also vom Punkte b ab nach dem Punkte h zu immer mehr ab, und wird hier ganz null.

248. Wiederholt man diese Raisonnements Wort für Wort bei einer sanftern oder steilern Böschung, als die der herabrollenden Erde ist, so gelangt man gleichfalls auf Resultate, die mit den durch die Erfahrung gegebenen übereinstimmen. Betrachtete man endlich anstatt einer vertikalen Schicht bh eine beliebig gegen den Horizont geneigte Schicht, so würde die Anwendung der allgemeinen Prinzipien §§. **140** ff. den Druck und die Hebkraft auf ein jedes Element, deren wechselseitige Reibung immer vernachläßigt werden darf (§§. **149** und **220**) ergeben. Von hieraus würde man dann zu verschiedenen allgemeinen Folgerungen in Bezug auf das Gesetz der Vertheilung der Pressungen auf jedes Element einer im stabilen Gleichgewichte sich befindenden Masse gelangen, deren einige schon in der Anmerkung zu §. **163** aufgeführt sind; der Zweck dieses Werkes jedoch und die Ausdehnung, die es schon erhalten hat, erlauben es nicht, noch länger bei diesem Gegenstande zu verweilen, der mehr für die Theorie als für die Praxis von Interesse ist.

Für unsern Zweck genügt es, einerseits gezeigt zu haben, daß die Coulombsche Annahme, gestützt auf naturgemäße Thatsachen*), zur Erklärung aller Erscheinungen führt, die bei solchen Massen vorkommen; anderseits aber, daß die Annahme der von dem anony-

---

*) Man hat der Coulombschen Theorie die Annahme vorgeworfen, daß alle Erden wie isolierte Prismen wirken, und daß ihr Bruch nach ebenen Flächen geschieht. Der Verfaßer Colin, eines Memoires sur les glissements spontanés, das er vor kurzem der Akademie der Wissenschaften übergeben hat, hat selbst bemerkt, daß der endliche Bruch der Erde nach krummen Flächen geschehe, deren Profil mehr oder weniger gestreckte Zykloiden sind; allein abgesehen davon, daß man einen solchen Bruch von den virtuellen Brüchen unterscheiden muß, ferner abgesehen davon, daß die Annahme der Solidität des Druckprismas für eine gewisse Ausdehnung der Stützfläche, keinesweges die Möglichkeit sukzessiver Brüche nach Ebenen, die verschiedenen Höhen der Füllung zukommen, ausschließt, muß man noch berücksichtigen, daß die beobachtete Krümmung allein von der Kohäsion der Erde herrühren kann, deren Einfluß wir ganz vernachläßigt haben, und die bei schwachen Belastungen oder geringen Tiefen überall merklich ist, also gerade für die oberen Theile, wo sie zu Abdachungen Veranlaßung giebt, die bei der alleinigen Wirkung der Reibung nicht stattfinden würden.

men Verfasser des **Mémoire sur les éboulements de Bergues**, vorgeschlagenen Regel zur Bestimmung der Dicke und Breite der Mauerfundamente willkührlich ist und zu Uebertreibungen Veranlaßung giebt.

Jedenfalls wird man den Vortheil nicht bezweiflen können, den eine Erweiterung der Fundamente unter der Form eines umgekehrt gewölbten Mauerwerkes darbietet, die entweder zur Verbindung der Stützpfeiler der Wölbungen oder zur Verbindung der Basis von Strebepfeilern dient, wenn man solche troß der zu befürchtenden Gleitung erbauen will, gegen die sie, wie man gesehen hat, nur wenig Hülfe leisten; will man aber mit dem Verfaßer, Breiten der Grundmauern von **30**, **40** und **45** Fuß zulaßen, so würde man ihnen gegen den Bruch einen Widerstand zuschreiben, den sie gewis nicht bei einem zusammendrückbaren oder beweglichen Boden besitzen, abgesehen selbst davon, daß die Erfahrung bei den großen Erdarbeiten, die neuerlich in den Niederlanden ausgeführt sind, bewiesen hat, wie es nicht immer hinreicht, den äußern Böschungen dieser Werke mit Gräben, selbst wenn eine breite Berme vorhergeht, die Böschung der jedesmaligen Erde zu geben, um das Einstürzen nnd das Aufheben des Grabenbodens zu verhindern.

249. Da die §§. **223** ff. angestellten Untersuchungen auch leicht (§§. **147** und **148**) auf ein Grabenprofil von beliebiger Form angewandt werden können, so würde es unnütz sein, bei dem Einfluße der Erdbermen, wie $I^1 E^1 F^1$ (Figur **45** und **51**) auf die Vermehrung der Stabilität der Fundamente, stehen zu bleiben. Wir wollen nur bemerken, daß ihre Wirksamkeit sehr gering werden würde, wenn man sie nicht sehr breit machte, damit sie das ganze Terrain bedecken, welches vor dem Mauerwerke in Folge der, der Länge der vertikalen Schicht $H^1 A^1 S^1$ (Figur **45**) nach wirksamen, Horizontalpressungen (§. **223**) auszuweichen strebt, und vorzüglich, wenn (§. **148**) die Bruchlinien, die sich auf Lagen von b^1 oder $b_1{}^1$ nahe der Fundamentbasis beziehen, durch den Fuß F^1 dieser Bermen hindurchgingen.

Die Bermen oder Risbermen aus Mauerwerk bieten offenbar auch wenig Vortheil in Rücksicht des Hindernisses dar, das sie dem horizontalen Gleiten des Fundamentes entgegensetzen würden, wenigstens so lange ihr Niveau nicht bedeutend über dem der Graben-

sohle hervorragt; denn, wenn einerseits die Dichtigkeit des Mauerwerkes im allgemeinen größer ist, als die der Erde, so ist andererseits ihre Reibung auf dieser weit geringer (§. 57). Jedenfalls kann man nicht läugnen, daß, wie man sogleich sehen wird, diese Bermen sehr vortheilhaft als komprimirende Massen gegen das in die Höheheben des vordern Bodens dienen können.

Drittes Kapitel.

Ueber einige allgemeine Mittel, die Fundamente gegen die Wirkungen der Zusammendrückbarkeit des Bodens zu sichern.

250. Wenn die Lokalumstände es weder gestatten, die Fundamente tief genug zu legen, noch auch die Pfähle so weit einzurammen, daß sie nicht tiefer eindringen wollen; wenn das Stampfen der Erde mit der Ramme, dessen Einfluß zur Befestigung des umgebenden Bodens so vortheilhaft ist; wenn endlich die Röste, Grundmauern oder allgemeinen Grundbette nicht hinreichend wären, um vollständige Sicherheit gegen die Wirkungen der Zusammendrückung der untern Theile zu geben, oder zu kostspielig wären: so kann man noch, als ein letztes Hülfsmittel diese Theile auf eine passende Ausdehnung, mittelst herbeigeführter Erde verbeßern, indem man beßere Erde, wie z B. Sand, Schutt und klein gestoßene Steine nimmt, und jede Lage derselben gut stampft; oder man kann komprimierende Massen vor die Werke bringen, wie dies dann die Natur der Bewegungen verlangt, die im Innern vorzugehen streben. Die Untersuchung über die Bedingungen, die unter diesen Umständen erfüllt werden müßen, und ihres Einflußes auf die Stabilität bilden den Gegenstand dieses letzten Kapitels.

Von den zugleich komprimierenden und hebenden Massen.

251. Die Bermen aus Mauerwerk, die man an dem Fuße der Erdbekleidungen anbringt, bieten als Hülfsmittel zur Vermehrung der Hebkraft, wie schon gesagt, wenig Vortheil dar, dagegen sind sie durch ihr Gewicht zur Komprimierung geeignet, um jedes

in die Höhe heben, das aus dem Boden erfolgt, zu verhindern; hierfür müßte man ihnen aber eine gewisse Höhe über dem Boden, und eine Breite geben, die den ganzen in die Höhe strebenden Theil bedeckt; dadurch werden bedeutende Kosten herbeigeführt, wenn man auch die nützliche Höhe der Eskarpen mehr oder weniger verringern wollte u. s. w. Es scheint daher nicht zweckmäßig zu sein, auf diese Weise eine Sicherung vorzunehmen, es sei denn, daß man nach der Konstruktion der Werke Zufälligkeiten dadurch vorbeugen wollte.

Jedenfalls muß man den Einfluß der größern Belastung, den diese Bermen auf den natürlichen Boden ausüben, nach denselben Verfahrungsarten berücksichtigen, die uns (§. 213) dazu gedient haben, den des Gewichtes der Erdbekleidung auf die Fundamente kennen zu lernen (man sehe auch §. 253); ein Eingehen in neue Details ist hier daher überflüßig, und es genüge die Bemerkung, daß, zur Ersparung von Kosten, ihre Dicke in jedem Punkte sich so verändern muß, daß sie da größer sei, wo die Differenz zwischen dem Drucke und der Hebkraft des Bodens selbst größer ist.

252. Für die am Waßer liegenden Plätze, und wo die Grabenbreite gewöhnlich sehr groß ist, kann man ein weniger kostspieliges System allgemeiner Befestigung, als das vorige anwenden, das sehr gut mit den, bei solchen Lokalitäten gebräulichen, Vertheidigungsmitteln sich vereinigen läßt, vorausgesetzt, daß man nicht, wie Vauban, die Höhe der Eskarpen verringern und den äußeren Fuß von ihrer Brustwehr weiter wegrücken will: dies besteht darin, daß man in dem Graben, in einer gewissen Entfernung von dem Fundamente, die z. B. 3 oder 4^m beträgt, eine Masse aus guter Erde, eine Art niedriger Kontregarde (Figur 52), mit natürlicher Böschung nach der Seite der Kontreskarpe und einer Stützmauer *LMNOP* nach der Eskarpseite hin, aufführt. Die letztere ist mit dem Fundamente der Futtermauer durch einen Boden AA^1MN in Form eines umgekehrten Gewölbes verbunden, und dient als gegenseitige Stütze für den Druck der Eskarpe und für die Hebkraft der Masse.

Die Wirkung der Hebkraft wirkt so schnell mit der Höhe der Erde, daß es fast immer hinreichen wird, diesem Aufwurfe eine sehr geringe Erhöhung zu geben; zuweilen kann es nützlich sein, sie in

der Form einer bedeckten Maskierung aufzuführen, und so die Eskarpe zum Theil den Kugeln der Breschebatterien zu entziehen; und dem Graben als Vertheidigungsmittel zu dienen. Immer wird es mit Hülfe der in diesem Buche angeführten Prinzipien und Beispiele leicht sein, sowohl die Stärken der Stützmauern und des Bodens zu berechnen, damit sie der Wirkung des Druckes widerstehen, als auch mit Hülfe eines leichten Probierens die Breite und Höhe zu bestimmen, die man der Masse zu geben hat, welche diese Hebkraft und die Kompression des Bodens hervorbringen soll; wir wollen daher hier nur schnell den zu befolgenden Gang anführen.

253. Betrachtet man bei einer ersten Annäherung die Wölbung als nur dazu bestimmt, den horizontalen Druck P auf das laufende Meter, der auf die ganze Höhe B^1H der Mauer und ihres Fundamentes ausgeübt wird, auszuhalten, so kann man daraus die Dicke e berechnen, und zwar mittelst der Relation $\Pi e = P$, die der §. **243** analog ist, und in der man Π höchstens $=50000^k$ annehmen darf. Hat man ferner nach §. **223** für die Ausdehnung $z^1 = A^1 b_1 = A^1 M . tg \frac{1}{2}\alpha$, die dem Punkte b_1, dessen Bruchlinie durch M geht, zukommt, den Druck

$$\tfrac{1}{2} p_1 \, tg^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 (z^{1^2} + 2az^1)$$

bestimmt, der dem Gewichte des Eskarpmauerwerkes A^1B^1CD und des Fundamentbodens entspricht, so setze man ihn der Hebkraft

$$\tfrac{1}{2} p_1 \cot g^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 (z^{1^2} + 2bz^1)$$

gleich, die für diese nämliche Ausdehnung einer Ueberhöhung von der Dichtigkeit p_1 und der unbekannten Höhe b zukommt, und die bei gleichmäßiger Vertheilung auf die horizontale Basis A^1M der Wölbung, dem Drucke auf A^1b_1 das Gleichgewicht halten kann; dies giebt

$$b = tg^4 \tfrac{1}{2}\alpha_1 \left(a - z^1 \frac{\cos\alpha_1}{2\sin^4\frac{1}{2}\alpha_1}\right) = tg^4 \tfrac{1}{2}\alpha_1 \left(a - A^1M \frac{\cot g\,\alpha_1}{\sin^2\frac{1}{2}\alpha_1}\right),$$

um den mittlern Druck auf das Quadratmeter zu berechnen, der vertikal von unten nach oben auf die äußere Wölbung A^1M wirkt. Von diesem Drucke muß man das Gewicht der Wölbung abziehen, und kann man dann die Stärke AA^1 durch ein, dem §. **212** ana-

loges Verfahren, oder durch die gewöhnliche Theorie der Gewölbe berechnen, indem man zu größerer Sicherheit für ein sehr bewegliches Terrain annimmt, daß auf die Enden der Wölbung der horizontale Druck P wirke, dessen Intensität demnach, ohne Verringerung der Reibung, als von $B^1 H$ nach $A^1 A$ oder NM verlegt, gedacht wird.

Kennt man somit die horizontale und vertikale Kraft, welche in MN wirksam sind, und deren letztere gleich der Hälfte der entsprechenden Pressungen auf $A^1 M$ vorausgesetzt wird, obgleich sie in der That geringer ist (§. 226), so kann man auch die Dimensionen und das Profil der kleinen Mauer $LMNOP$ und der anliegenden Erde so bestimmen, daß ihr Gewicht und ihre Hebkraft vollständig die fraglichen Kräfte aufheben; dies kann leicht nach den Methoden der zweiten Abtheilung geschehen.

254. Uebrigens werden unter den gewöhnlichen Umständen nie die Bruchlinien $b_1 X_1$ in die Füllung fallen, noch wird der Differentialdruck auf das in b liegende Element die entsprechende Hebkraft übertreffen, denn dies erfordert (§. 226) daß die Bedingung

$$z^1 + b < tg^4 \tfrac{1}{2} \alpha_1 (z^1 + a)$$

erfüllt sei u. s. w.; man braucht sich demnach gar nicht um das zu bekümmern, was für diejenige Punkte stattfindet, die unter b_1 liegen, oder für die Bruchlinien, die unter $b_1 M$ liegen. Unter kritischen Umständen, wo der untere Boden nahe flüßig ist, wird es zweckmäßig sein, sich davon zu überzeugen, daß der horizontal unter B^1 oder A^1 (§. 228) wirkende Druck, indem man ihn selbst nach der auf M vertikalen Schicht verlegt denkt, nicht im Stande ist, das in die Höheheben oder das Gleiten der Stützmasse $I^1 E^1 F^1$ .... zu veranlaßen.

Von dem Fundieren auf Sand.

255. Das Resultat der merkwürdigen Versuche, die Moreau und Niel in der 11ten und 12ten Nummer des **Mémorial de l'officier du génie** beschrieben haben, zeigen, wie vortheilhaft es ist, bei zusammendrückbaren Fundamentboden einen Theil dieses Bodens durch eine dicke Lage feuchten Sandes zu ersetzen, indem dadurch die Ungleichheiten des Einsinkens verhindert werden, und indem da-

durch ein beträchtlicher Theil des Druckes übertragen wird auf die, durch das einschließende Terrain oder durch die Masse dieser Lage selbst gebildeten, Wände. Leider sind die Versuche nicht oft genug wiederholt, als daß sie für jeden Fall der Anwendung auf bestimmte Regeln führen könnten; und wir glauben daher, daß es nicht unnütz ist, wenn wir zeigen, wie man direkt die Frage der Rechnung, mit Hülfe der in diesem Abschnitte aufgestellten Prinzipien, unterwerfen kann.

Eins der wichtigsten Probleme, das Niel aufzulösen gesucht hat (Mèmorial Nro. 12 p. 277 ff.), besteht darin, durch die Erfahrung die Dimensionen einer horizontalen Sandschicht *LMNQ* (Figur 53) aufzusuchen, die in einem prismatischen vertikalen Kasten eingeschloßen ist, damit sie dem Drucke eines andern vertikalen Prismas *ABCD* widerstehen könne, das auf der Oberfläche dieser Schicht, mittelst eine hölzerner Zwischenplatte A^1B^1 von $0^m,8$ Breite und $1^m,9$ Länge, in der auf der Figur rechtwinkligen Richtung ruhte. Der Kasten selbst hatte 2^m in dieser letztern Richtung, 1^m Sandtiefe und $3^m,5$ Länge nach *LM*; drei seiner Seiten waren von den Seiten der hölzernen Platte um $0^m,05$ ungefähr entfernt. Aus diesem Versuche folgt, daß, abgesehen von einem, während der Belastung — mit 15000^k, die das Belastungsprisma *ABCD* bildeten, und folglich mit 9868^k auf das Quadratmeter der Plattenfläche — erfolgten Einsinken um $0^m,003$, dies Prisma jede nur wünschenswerthe Stabilität zeigte. Obgleich die Sandschicht hier nur nach einer Seite hin als unbegrenzt angesehen werden kann, und nicht ganz von Kohäsion befreit war, so dient doch das schwache Einsinken zum Beweise dessen, was §§. 226 und 227 über die Art der Vertheilung der Pressungen nach der Länge von A^1B^1 gesagt ist, zumal dieselbe überdies der plötzlichen Veränderung des Kastens und der Anordnung der Stabilität, welche die Sandkörner bei der ersten Wirkung der Last anzunehmen streben, zugeschrieben werden kann.

256. Nimmt man in der That zur Berechnung des Druckes und der Hebkraft auf eine beliebige Höhe $Z = A^1b$ der Vertikale des Punktes A^1, die Formeln:

$$P = \tfrac{1}{2} p_1 \, tg^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 \, (z^2 + 2az),$$

$$B = \tfrac{1}{2} p_1 \cotg^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 \, z^2$$

des §. 223 an, in deren letzterer $b = o$ angenommen ist, und die sich hier auf die Bruchlinien bX und bY, die Halbierungslinien des Winkels und des Supplementes des Winkels α_1 der natürlichen Böschung der Erde, bm, mit der Vertikale bA^1, beziehen; bemerkt man ferner, daß nach den Versuchen Niel's $\alpha_1 = 45^0$, $p_1 = 1688^k$ und folglich (§. 223) $a = \frac{9868}{1688} = 5^m,846$ war; so findet man nach den Untersuchungen der §§. 226 und 227:

1) daß die Seiten- und elementaren Pressungen in Folge des gleichförmig vertheilt angenommenen Gewichtes der Belastungsmasse $ABCD$ größer sind als die entsprechende Hebkräfte für die ganze Ausdehnung von Z oder $A^1 b = o$ bis zur Tiefe $a \frac{\sin^4 \frac{1}{2}\alpha_1}{\cos \alpha_1} = 0^m,176$, unterhalb welcher sie sich vollkommen aufheben, und die wenig von derjenigen, $0^m,172$, abweicht, die für die absolute Stabilität $atg^4 \frac{1}{2}\alpha_1$ (§. 227) sich findet;

2) daß die Tiefe, in der der Gesamtdruck und die gesamte Hebkraft P und B einander das Gleichgewicht halten, doppelt so groß ist, wie die vorige, oder $= 0^m,35$;

3) daß endlich die Stabilitätsbedingung

$$A^1 V = \frac{1}{2} A^1 B^1 = 0^m,4 > atg\alpha_1 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha_1 \, tg^4 \frac{1}{2}\alpha_1 = 0^m,147$$

(ibid) hier überflüßig erfüllt ist, und es so lange sein wird, als die Breite $A^1 B^1$ der Holzplatte größer als $2.0^m,147 = 0^m,394$ ist.

Ueberdies darf man nicht vergessen, daß bei der von Niel gemachten Anordnung, das Belastungsprisma durchaus nicht als unbegrenzt in der, auf der Ebene der Figur rechtwinkligen, Richtung angesehen werden konnte, und man begreift wohl, daß die Annäherung der Platte $A^1 B^1$ an drei Seiten des, den Sand enthaltenden Kastens, merklich die Größe ihres Einsinkens vermindern konnte, da Bogenstützungen (arcboutements) und Reibungen sich an den Seiten des Kastens bilden mußten.

257. Niel lehrt uns ferner noch, daß, wenn bei denselben Versuchen, die Wand LQ, die auf der der Belastung entgegengesetzten Seite sich befand, weggenommen wurde, keine merkliche Bewegung an ihrer Basis entstand, und daß dies nur dann der Fall war, wenn der Scheitel c der natürlichen Böschung des Sandes ac der Platte um die Entfernung $A^1 c = 1^m,05$ genähert wurde.

Aus den §§. 141, 148 ff. auseinandergesetzten Betrachtungen folgt, daß die Hebkraft bei weitem nicht für diesen Fall den durch die obige Formel angegebenen Werth behält, sondern weit geringer werden kann, da die Bruchlinie, anstatt nach bY größer zu sein, nach dem Fuße der äußern Böschung ac ihre Richtung nehmen kann; dies erfordert, daß man das dreiseitige Prisma A^1bY durch das dem Trapeze A^1bac entsprechende ersetze. Sei bo die von dem Punkte b auf die verlängerte Richtung der Böschung ac herabgefällte Normale, k der Durchschnitt dieser Böschung mit der zur Diagonale bc des Trapezes A^1bac parallelen Linie A^1k, so ist das Dreieck abk mit dem Trapeze gleich groß; ist endlich y der Punkt, wo die unbegrenzte Richtung von bo durch die, durch den Punkt k gelegte, Parallele zur Bruchlinie ba getroffen wird, so hat man, nach den zitierten §§. zur Berechnung des Werthes der Hebkraft auf $bA^1 = z$, die wir B^1 nennen wollen, um sie von der vorigen (§. 256) zu unterscheiden,

$$B^1 = \tfrac{1}{2}p_1 . bo . by$$

da die Reibung auf bA^1 nicht berücksichtigt werden darf (§. 220).

258. Für jede andere hypothetische Bruchlinie ba^1, zu der man von dem Punkte k aus eine Parallele gelegt haben, würde, die in y^1 die Richtung bo trifft, würde die Hebkraft auf bA^1 gleichfalls durch den Ausdruck $\tfrac{1}{2}p_1 . bo . by^1$ gegeben sein; dies zeigt, in Uebereinstimmung mit den Bemerkungen §. 148, daß die erste dieser Kräfte die kleinste von denen ist, welche der Fläche ac entsprechen, während die größte in der That der hypothetischen Bruchlinie bc angehört. Da die Richtung von bY, für den Punkt b einem Minimum der Hebkraft unter allen den Richtungen entspricht, die hypothetischen Bruchlinien zukommen, welche A^1c treffen, so folgt daraus offenbar, daß, sobald A^1Y oder $A^1b . \text{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha_1 = z . \text{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha_1$ größer ist als A^1c, d. h. sobald $z > A^1c . tg\tfrac{1}{2}\alpha_1$ ist, die Hebkraft auf A^1b nicht mehr den Bruchlinien bY zukommt, sondern denen, welche nach a gerichtet sind; dies erkennt man à priori, wenn man bemerkt, daß, wenn s der Fußpunkt der von Y auf bo herabgefällten Normale ist, die Hebkraft in Bezug auf bY auch durch die Formel (§. 161) $B = \tfrac{1}{2}p_1 . bs^2$ gegeben wird.

259. In dem obigen besondern Falle (§§. 256, 257), wo

$tg\frac{1}{2}\alpha_1 = 0{,}4142$, $\cotg\frac{1}{2}\alpha_1 = 2{,}4142$, $A^1c = 1^m{,}05$ ist, findet sich die Bedingung $z > A^1c.tg\frac{1}{2}\alpha_1$ erfüllt, sobald z oder A^1b größer ist, als $0^m{,}435$; für alle dem b entsprechenden Lagen muß man demnach die Bruchlinie ba und die Formel $B^1 = \frac{1}{2}p.bo.by$ benutzen, die, wenn man nur die Rechnung und nicht die, übrigens sehr einfachen, geometrischen Konstruktionen benutzen will, durch die folgende ersetzt werden kann:

$$B^1 = \frac{1}{2}p_1(c + ztg\alpha_1)\frac{(c + ztg\alpha_1)h_1 + cz}{(c + h_1 tg\alpha_1)tg\alpha_1 + h_1 - z},$$

in der h_1, c und $c + h_1 tg\alpha_1$ die Längen A^1d, A^1c und ad vorstellen, welche unmittelbar durch die Bedingungen des Problems gegeben sind; $c + z.tg\alpha$ ist die Länge der durch den Punkt b gehenden Horizontale be, bis zur Böschung ac.

260. Jenachdem nun Werthe von z vorhanden sind, oder nicht, die zwischen $z = A^1c.tg\frac{1}{2}\alpha_1$ und $z = h_1$ liegen und B^1 kleiner machen als P (§. 256), wird ein Einstürzen nach Linien ba, die diesen Werthen von z entsprechen, erfolgen oder nicht. Da die fragliche Bedingung von einer ziemlich verwickelten Gleichung des dritten Grades in Bezug auf z abhängt, so kann sie nur durch eine Aufeinanderfolge von Annäherungen gefunden werden*) die die Aufsuchung der Werthe von c und h, die in jedem besondern Falle zur Sicherung der Stabilität der Sandmasse nöthig ist, sehr beschwerlich macht. Man bemerke jedoch, daß für den besondern Werth $z = c.tg\frac{1}{2}\alpha_1$, für den Y und c zusammenfallen, die Hebkraft B^1 die sehr einfache von h_1 unabhängige Form $B^1 = \frac{1}{2}p_1c^2$ annimmt; die Stabilität wird dann nur stattfinden, wenn der Bedingung

$$\tfrac{1}{2}p_1c^2 > \tfrac{1}{2}p_1 tg^2\tfrac{1}{2}\alpha_1(c^2tg^2\tfrac{1}{2}\alpha_1 + 2ac.tg\tfrac{1}{2}\alpha_1)$$

---

*) Die Frage kommt im Grunde auf die Auffindung des kleinsten Werthes von h_1 oder c zurück, der der Gleichung $B^1 = P$, die vom dritten Grade nach z ist, zukommt und die eine fremde negative Wurzel wegen des letzten positiven Gliedes besitzt, und zwei andere imaginäre oder gleiche Wurzeln gestattet; dadurch gelangt man nach bekannten Sätzen, auf eine Gleichung des 6ten Grades nach h_1 und c. Ist a sehr groß im Vergleich mit dem Maximum h_1 von z, und kann man demzufolge z^2 gegen $2az$ in dem Ausdruck für P vernachläßigen, so ist die Gleichung $B^1 = P$ nur vom zweitem Grade und es entsteht somit eine bedeutende Vereinfachung. Die Bedingung, daß die Wurzeln einander gleich sein müßen, bleibt aber dennoch sehr kompliziert, und ist in Bezug auf c vom 4ten obgleich in Bezug auf h_1 vom 2ten Grade.

oder

$$c > 2a \frac{tg^3 \frac{1}{2}\alpha_1}{1 - tg^4 \frac{1}{2}\alpha_1} = a \sin^2 \frac{1}{2}\alpha_1 \, tg\, \alpha_1$$

à fortiori Genüge geleistet wird. Da übrigens der besondere Werth von $z = c\, tg \frac{1}{2}\alpha_1$ allgemein kleiner ist als der von $\frac{1}{2} A^1 B^1 . \mathrm{cotg} \frac{1}{2}\alpha_1$, so giebt dies in allen möglichen Fällen (§. 227) für den Werth von c eine untere Grenze, von der er sich im allgemeinen wenig entfernen wird.

Andererseits, wird man die genannten Annäherungen sehr abkürzen, wenn man für jede Lage des Punktes b die Werthe (§§. 256, 257) der Rechtecke $bo.by$ und $tg^2 \frac{1}{2}\alpha_1 z(z+2a) = A^1 X(A^1 X + 2a\, tg \frac{1}{2}\alpha_1)$, dividiert durch eine konstante Länge, wie z. B. $\frac{1}{2}\alpha$, geometrisch konstruiert; denn trägt man sie von b nach u und t respektive auf der, dieser nämliche Lage von b entsprechenden, Horizontale ab, so wird die Aufeinanderfolge der Punkte u einer Hyperbel angehören, und die der Punkte t, einer Parabel, deren Theile sich, in Bezug auf die Ausdehnung von $A^1 d$, auf der Figur verzeichnet finden, und sich in keinem Punkte schneiden dürfen, wenn die Belastungsmasse für die besondern Werthe, die dem $h_1 = A^1 d$ und dem $c = A^1 c$ ertheilt werden, stabil ist: das genaue Gleichgewicht entspricht dem Falle, wo sich die beiden Kurven zwischen den Grenzen berühren, die den äußersten Lagen von b, vom Punkte d bis zum Durchschnitt b^1 von $A^1 d$ und der Parallele $b^1 c$ zu bY, entsprechen; hierdurch werden die Operationen um so mehr vereinfacht, als die Parabel der Pressungen P sich nicht mit h_1 und c verändert.

261. Da diese Konstruktionen deutlich genug in Figur **53** angezeigt sind, so genüge hier die Bemerkung, daß man für den Punkt u, $bq = \frac{1}{2}a$, $bp = bo$ genommen, und yu parallel zu pq gezogen hat, daß ferner für den Punkt t, die Vertikale $A'A'' = \frac{1}{2}a = bq$, die Horizontale $A''H = A'A''\, tg \frac{1}{2}\alpha_1$, $A''I = 4 A''H = 2a . tg \frac{1}{2}\alpha_1$, $IX = A'X$ gemacht, und daß endlich XT normal auf $A'X'$ gezogen ist, wodurch man

$$bt = A^1 T = A^1 X \frac{(A^1 X + 2a\, tg \frac{1}{2}\alpha_1)}{\frac{1}{2}a}$$

erhält. Da übrigens der zu berücksichtigende Theil der Parabel, nahe mit einer Geraden zusammenfällt, wenn $A^1 d$ sehr klein in

Vergleich zur Höhe a der fingierten Belastung ist, so braucht man dann nur einen einzigen bestimmten Punkt von A^1 zu konstruieren.

Man sieht, daß für unsern Fall, wo $\alpha_1 = 45^0$, $A^1 c = 1^m,05$ und $A^1 d = 1^m$ (§. 259) ist, diese Grade dem entsprechenden Hyperbelbogen sehr nahe liegt, aber sie nirgends trifft, so daß das Belastungsprisma im stabilen Gleichgewicht wäre, was dem Versuche Niels (§. 257) widerspricht. Nähert man den Punkt c dem Punkte A^1 ungefähr um $0^m,87$, und bestimmt nur einen der zwei Punkte u in der Mitte des Hyperbelbogens, so findet man, daß er die Linie $A^1 t$ berührt, und daß demnach ein strenges Gleichgewicht stattfindet. Beinahe dasselbe Resultat erhält man mittelst der Formel $c > a \sin^2 \frac{1}{2}\alpha_1 \, tg\, \alpha_1$ (§. 260), denn sie giebt $c > 0^m,85$.

262. Der Unterschied von $0^m,18$ zwischen dem Resultate der Rechnung und dem der Erfahrung läßt sich nicht durch einen besondern Zufall erklären, sondern um dies zu thun, genügt die Bemerkung, daß ein Fehler von nur 3^0 bei der Meßung des Winkels α_1 denselben herbeiführen kann: denn nimmt man $\alpha_1 = 48^0$, $a = 5^m,85$, so findet man durch dieselbe Formel $c > 1^m,076$, welche Größe von selbst nur eine untere Grenze ist. Ungeachtet der Wahrscheinlichkeit eines solchen Fehlers bei der Bestimmung des Winkels α_1 der natürlichen Böschung des Sandes muß man doch zur vollkommenen Bestätigung der vorigen Theorien und Formeln wünschen, daß die Versuche Niels sorgfältigst wiederholt würden mit Lagen von vollkommen trockenen Sande, die nur durch natürliche Böschungen begrenzt wären, und die man als nahe unbegrenzt in horizontaler Richtung betrachten könnte.

In Bezug auf den Gebrauch des angehäuften Sandes zur Befestigung bei beweglichem Terrain kommen eine große Menge nützlicher Aufgaben vor, die untersucht zu werden verdienten, die wir aber hier aus Mangel an Raum und Zeit mit Stillschweigen übergehen müßen. Wir wollen aber einige wesentliche Bemerkungen anführen, die die Aufmerksamkeit des Lesers auf die Anwendung der vorigen allgemeinen Prinzipien auf diese wichtige Frage leiten können.

Bedient man sich des Sandes beim Fundieren, so sind der untere Boden, so wie die Seitenlagen schlecht. Nach Niels Bemerkungen hat die Anwendung einer dicken Zwischenschicht von Sand

zwischen dem Boden und der Belastung, keinen Einfluß auf die Verminderung des Druckes, sobald sich Bogenstützungen zwischen den Seitenwänden des Fundamentes bilden, die, indem sie sich verschieben laßen, der Stabilität noch gefährlicher werden können, als die Wirkungen in Folge der Kompressibilität auf die Ungleichmäßigkeit des Setzens. Unserer Ansicht nach ist dies jedoch kein Grund, weder den, immer beträchtlichen, Einfluß dieser Wände zu vernachläßigen, noch auch sich sicher zu glauben, weil man, nach dem Vorschlage Niels, der Sandlage eine hinlängliche Breite gegeben hat, damit sie nahe für eine unbegrenzte Schicht gelten könne; denn der Druck, den sie auf den untern Boden überträgt, darf auch nicht im Stande sein, die Masse derselben zur Seite zu schieben (§. 226). In dem folgenden Artikel wollen wir kurz zeigen, wie man à priori den Zustand der Kompression und der Stabilität in Bezug auf diese verschiedenen Umstände auffinden kann, und hiermit wollen wir auch diese Abhandlung beschließen.

Fortpflanzung der Pressungen; Bogenstützungen.

264. Seien MD, LC (Figur **54**) die vertikalen Wände und LM die Basis eines festen prismatischen Kastens, oder einer wirklichen oder fingierten Ausgrabung in dem natürlichen Boden; dieselbe sei bis zur Höhe der Basis AB einer fremdartigen Belastungsmasse (statt der wir ein Erdprisma ABB^1A^1 von demselben Gewichte aber von der Dichtigkeit p_1 des Sandes der Ausgrabung und von der Höhe $AA^1=a$ annehmen) mit beliebiger homogener Sanderde angefüllt. Beachtet man besonders, was mit der vertikalen Schicht in A vorgeht, und behält überdies alle Benennungen und Annahmen der vorigen §§. bei, indem man der Einfachheit wegen den natürlichen Boden und die Ausgrabung durch die Horizontale von AB begrenzt annimmt, so wird der Druck auf die beliebige Höhe $Ab=z$, der aus der Belastung und dem zwischengebrachten Sande herrührt immer durch die Formel

$$P=\tfrac{1}{2}p_1\,tg^2\,\tfrac{1}{2}\alpha_1\,(z^2+2az)$$

gegeben sein. Dieser Druck und alle ihm analogen können bis LC oder MD fortgepflanzt werden und zwar mit einer Intensität, die

vorzüglich von der Tiefe der Ausgrabung und der Entfernung ihrer Wände abhängt. Um das Gesetz dieser Fortpflanzung zu entdecken, muß man die Aufgaben umkehren und z. B. untersuchen, welches für einen gegebenen Punkt a von LC, der in der Entfernung $h=aC$ von der Horizontale von AB liegt, die Bruchlinie ist, die dem Maximum des Druckes auf aC entspricht, indem man nach der obigen Formel auf den auf Ab wirkenden Druck Rücksicht nimmt; der Ueberschuß dieses größten Druckes über den Druck $P_1=\frac{1}{2}p_1\,tg^2\,\frac{1}{2}\alpha_1\,h^2$, der einfach aus der Wirkung der obern, durch aA begrenzten Masse entsteht, läßt den Theil des Einflußes erkennen, der dem P oder der Belastung ABB^1A^1 zukommt; wäre das fragliche Maximum kleiner als der natürliche Druck P_1, so brauchte man den Druck P gar nicht zu suchen.

Das allgemeine Problem, unter diesem Gesichtspunkte aufgefaßt, kann offenbar nicht auf die frühern zurückgeführt werden, und erfordert eine besondere Auflösung.

265. Nennt man N^1 und N die Rückwirkungen normal auf die Flächen aC und ab des Prismas $abAC$, dessen Gewicht $=Q$ sei, und den Winkel $Cab=v$; ferner $f_1{}^1=tg\varphi_1{}^1$, den Reibungskoeffizienten für die Wand LC, $f_1=\cot g\alpha_1=tg\varphi_1$ den für die Erde oder den Sand, aus der dies Prisma besteht; und bemerkt man, daß das Gleichgewicht bestehen muß zwischen der horizontalen Kraft N^1-P, die dies nämliche Prisma auf der Böschung ab zurückhalten will, und der vertikalen Kraft $Q-f_1{}^1N^1$, die es herabzuziehen strebt, so findet man nach den Betrachtungen §. **2**:

$$1)\qquad N^1-P=(Q-f_1{}^1N)\,\frac{1-f_1\,tgv}{f_1+tgv},$$

$$N^1=\frac{P(f_1+tgv)+Q(1-f_1\,tgv)}{f_1+f_1{}^1+(1-f_1f_1{}^1tgv)};$$

das Maximum dieses Ausdruckes in Bezug auf v giebt die auf aC normale Seitenkraft des Druckes:

$$2)\qquad N=(N^1-P)\cos v+(Q-f_1{}^1N^1)\sin v=\frac{N^1-P}{\cos v-f_1\sin v},$$

für die von unten nach oben auf die Bruchebene ab ausgeübte Rückwirkung, die durch die Substitution der Werthe von N_1 und

von v auch null oder negativ werden kann; dann hört das durch diese Ebene begrenzte Prisma auf, auf den untern Boden zu wirken, es findet eine Bogenstützung gegen die Wand LC Statt.

Hier ist $aC=h$, $AC=c$, $Ab=z$, $\cot g v=\frac{h-z}{c}$,

$$Q=\tfrac{1}{2}p_1 c(h+z);$$

substituiert man diese Werthe, so wie den für P (§. 264) in den allgemeinen Ausdruck von N^1, so hat man endlich das Maximum des Ausdruckes

$$N^1=\tfrac{1}{2}p_1 \frac{tg^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 (z^2+2az)(c+f_1 h-f_1 z)+c(h+z)(h-f_1 c-z)}{(f_1+f_1{}^1)(h-z)+(1-f_1 f_1{}^1)c}$$

zu suchen, und wird dadurch zur Bestimmung von z auf eine Gleichung des dritten Grades geführt, die eben so beschwerlich durch die bekannten Annäherungsmethoden aufzulösen ist, als wenn man direkt hypothetische Werthe von z in N^1 substituierte, um denjenigen zu finden, der dem verlangten Maximum entspricht. Deshalb scheint es uns zweckmäßiger, hier den geometrischen Weg anzuwenden, den wir §§. 139 und 140 angewandt haben.

266. Sei ad die Gerade, welche mit der hypothetischen Bruchlinie und unterhalb derselben einen Winkel bad bildet, der gleich ist dem $\varphi_1=90^0-\alpha_1$ der natürlichen Böschung der Erde oder des Sandes mit dem Horizonte; ae eine andere Gerade, die im Punkte a außerhalb mit $AbaC$, den Winkel Cae bildet, der dem Winkel $\varphi_1{}^1$ der Reibung der nämlichen Erde auf der Wand LC ist, und der die Verlängerung von AC in e trifft, wodurch $Ce=aC.tg\varphi_1{}^1=f_1{}^1.aC$; dann hat man nach den zitierten §§. und nach dem obigen Raisonnement

$$N^1-P=(Q-f_1{}^1 N^1)\frac{aC}{dC},$$

oder:

$$N^1=\frac{P.dC+Q.aC}{dC+f_1{}^1.aC}=P.\frac{dC}{de}+Q\frac{aC}{de};$$

wo d der Durchschnitt von ad mit der unbegrenzten Horizontale des Punktes C ist. Ueberdies hat man (§. 139) zur Berechnung

der Rückwirkung F oder $N\sqrt{1+f_1^2}$ normal auf ad, wenn das Maximum von N^1 und die Neigung von ab gefunden sind,

$$N\sqrt{1+f_1^2}=(N^1-P)\frac{ad}{aC}=(Q-f_1{}^1P)\frac{ad}{de};$$

da immer $f_1{}^1.aC=Ce$ ist.

Um den Werth von N^1 zu finden, nehme man auf der Horizontale des Punktes A_1 nach der linken Seite hin, zuerst die Distanz $Aa^1=Ca$, und füge dieser $a^1m=Ab$ hinzu, dann nach der rechten Seite hin $AX=Ab.tg\,AbX=z\,tg\,\frac{1}{2}\alpha_1$; endlich bestimme man auf der Horizontale des Punktes A^1, dessen Höhe über dem Punkte A hier $=2a$ angenommen ist, ebenso

$$A^1X^1=A^1b\ tg\,A^1bX^1=(z+2a)\,tg\,\tfrac{1}{2}\alpha_1 \text{ oder}$$
$$A^1I=AA^1.tg\,\tfrac{1}{2}\alpha_1$$

und füge hierzu $IX^1=AX$ hinzu. Zieht man durch den Punkt A nach links die unbegrenzte Parallele Apn zu ad, so wird sie die, durch den Punkt m gehende, Parallele zu ae und die Vertikale des Punktes C in den respektiven Punkten n und p schneiden, von denen aus man nach der Horizontale des Punktes C hin, die Vertikale nl und die Parallele pq zu ae ziehen muß: so erhält man, da die Dreiecke Anm, Apq dem Dreieck dae, in welchem die Vertikale aC homolog mit nl und pC ist, ähnlich sind

$$N^1=\tfrac{1}{2}p_1\left\{AX.A^1X^1\frac{dC}{de}+AC(aC+Ab)\frac{aC}{de}\right\}$$
$$=\tfrac{1}{2}p_1.AC\left(\frac{AX.A^1X^1}{Aq}+nl\right);$$

zieht man daher die Linie qX^1, die AA^1 in s schneidet, und die Linie Xs, die die Horizontale des Punktes A^1 in t trifft, und nimmt auf der Vertikale des Punktes X, $Xx=A^1t+nl$, oder auf der Vertikale l nach unten zu $nz=A^1t$, so hat man endlich

$$N^1=\tfrac{1}{2}p_1.AC.Xx=\tfrac{1}{2}p_1.AC.lz,$$

und die Aufgabe ist hiemit zurückgebracht auf die Aufsuchung des Maximums von Xx oder lz, d. i. auf die des Scheitelpunktes der Kurve, die durch die Aufeinanderfolge der Punkte x oder z, in

Bezug auf verschiedene Neigungen der durch den festen Punkt a gehenden, hypothetischen Bruchlinien ab, gebildet wird.

267. Die Reihe der zur Auffindung, von verschiedenen Punkten x oder z, nöthigen Operationen findet sind in der Figur 54 angezeigt, in der diese Punkte und die, aus welchen sie sich ergeben, verschieden numeriert sind, um die einen von den andern zu unterscheiden; die 0 (Nullen) beziehen sich auf die Lage aA von ab, u. s. f. — Obgleich die Figur nach dem vorigen deutlich ist, so halten wir es doch für nöthig, hier mehre Bemerkungen hinzuzufügen, die die Operationen bedeutend abkürzen.

Zuerst sieht man, daß, da für die Lage aA von ab die Linie AX null ist, dasselbe mit A^1t der Fall ist, so daß lz oder Xx sich einfach auf den entsprechenden Werth von ln reduzieren. Dann wird für die mit 2 numerierte Lage ab^1 von ab, in der diese Linie die Neigung der natürlichen Böschung der Erde hat, die Gerade ad oder aa_1, die mit ihr einen Winkel, gleich dem φ_1 dieser Böschung bildet, horizontal und ihre durch A gehende Parallele An fällt mit ACe zusammen, so daß ln jetzt null ist, und Xx oder lz gleich ist dem entsprechenden Werthe von A^1t; der Druck N^1 auf LC reduziert sich daher auf den von P (§. 264). Es wird selten vorkommen, daß man die Operationen weiter als auf Lagen von ab treiben muß, die unter ab^1 liegen, für die ln sein Zeichen ändern würde und daher von A^1t abgezogen werden müßte, um Xx oder lz zu erhalten; in diesem Falle könnte man für beide Kurven negative Ordinaten erhalten, die man durchaus nicht zu betrachten brauchte.

268. Endlich, und dies verdient vorzüglich bemerkt zu werden, kann es sich für große Belastungen oder Werthe von a ereignen, daß der Scheitel der Kurve der x, — dessen Ordinate, so wie auch die entsprechenden Werthe von $N^1 = \frac{1}{2}p_1 . AC . Xx$, $f_1{}^1 N^1$ und N, immer vollkommen bestimmt sind — weit genug von dem Anfangspunkte A entfernt liegt, damit die Abszisse AX die Breite der Basis dieser Belastungen übertreffe; dann gehört der übrige Theil der Kurve nicht mehr der Aufgabe an, und müßte durch einen andern Theil der Kurve ersetzt werden, den man erhält, wenn man den Druck selbst

$$P = \tfrac{1}{2}p_1 tg^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 (z^2 + 2az)$$

durch denjenigen ersetzt, welcher Bruchlinien zukommt, die von bX verschieden sind und die Belastungsmasse ABB^1A^1 nicht treffen. Hierzu gelangt man auch mittelst der Verfahrungsarten, die schon in §. **221** Figur **45** angezeigt sind*); wenn aber die Tiefe von a unter C nicht selbst beträchtlich ist, wird allgemein der Fall eintreten, daß der größte für N^1 anzunehmende Werth, dann der Abszisse AB entsprechen wird, vorausgesetzt, daß er den natürlichen Druck P_1 (§. **264**) in Bezug auf die vordere Masse aAC übertrifft; dies wird immer eintreten, wenn die durch a gezogene Parallele zu bX nahe bei A vorbeigeht.

Ueberdies wird es, wie schon gesagt, selten nützlich sein, die Konstruktionen bis zu den Lagen von ab fortzusetzen, die unter den Horizont geneigt sind, und für die die Ordinate Xx oder lz allgemein einen sehr großen Werth annehmen würde; wenn aber dies geschähe, ohne das diese nämliche Ordinate negativ würde, so würde es zweckmäßiger sein, die ursprüngliche Art der Auflösung umzuän-

---

*) Für den besondern Fall einer isolierten, auf horizontalem Boden ruhenden Belastungsmasse, würde man durch ein Verfahren (§. 2) ähnlich dem, dessen sich schon Coulomb bei einer Aufgabe in Bezug auf den Einfluß unabhängiger Belastungen bedient hat, finden:

1) Für die Tangente des Neigungswinkels der neuen Bruchlinie bX gegen die Vertikale des Punktes b, wenn e die Breite AB bezeichnet,

$$tg\,v = f_1 + \sqrt{\left(\frac{1+f_1^2}{f_1}\right)\left(f_1 - \frac{2ae}{z^2}\right)};$$

2) für den Ausdruck des Druckes

$$P = \tfrac{1}{2}p_1 \left\{\sqrt{1+f_1} - \sqrt{f_1\left(f_1 - \frac{2ae}{z^2}\right)}\right\}^2$$

Ungeachtet der Einfachheit dieser Formeln wird es für unsere Aufgabe beßer sein, auf die im Texte angegebenen Konstruktionen zurückzugehen.

Wenn die Erdmasse durch eine zweite feste Wand DM, die mehr oder weniger entfernt von B liegt, begrenzt wird, und wenn der obige Werth von $tg\,v$ größer gefunden wird, als der des Verhältnisses von AD zu $Ab = z$, so würde es beßer sein, statt dieses letztern Ausdruckes von P, das Maximum eines anderen, etwas weitläufigeren zu substituieren, das man durch Verfahrungsarten, analog denen §§. 265 ff, unter Berücksichtigung der rückwirkenden Kraft $\tfrac{1}{2}p_1\,tg^2\,\tfrac{1}{2}\alpha_1\,z^2$ der Wand MD, erhalten würde, das ich aber hier nicht anführen will, da mein Zweck hier nur darin besteht, die Natur der Betrachtungen zu zeigen, auf die man bei gewissen Aufgaben in Bezug auf Erdmassen, die durch feste Wände begrenzt sind, Rücksicht nehmen muß.

dern: da das Prisma $AbaC$ alsdann das Bestreben besitzt, unter der Wirkung von P hinaufzurücken, so würde die Reibung $f_1{}^1 N^1$ (§. 265) auf aC sich zu Q addieren, anstatt sich davon zu subtrahieren; da ferner $f_1{}^1$ in den Formeln das entgegengesetzte Zeichen annimmt, so müßte die Richtung von ae und von allen ihren Parallelen durch die einer Geraden ersetzt werden, die symmetrisch in Bezug auf die Vertikale LC liegt, wovon man sich überzeugen kann, wenn man für diesen Fall die Raisonnements §§. 266 zu Hülfe nimmt.

269. Bis jetzt haben wir uns gar nicht bekümmert um die Werthe der rückwirkenden Kraft N in Bezug auf die untere Fläche des Prismas $abAC$, die zu der Untersuchung einer einfachen Bogenstützung gegen LC Veranlaßung geben konnte (§. 265), wenn sie ihr Zeichen oder ihre Richtung für bestimmte Werthe von N^1 oder v, nachdem sie null geworden, änderte.

Die Ausdrücke von N^1 und von N (§. 265) können, so lange $v < 90^0$ ist und $f_1{}^1$ positiv bleibt, unter die allgemeine Form gebracht werden

$$N^1 = \frac{Q\cos(v+\varphi_1)+P.\sin(v+\varphi_1)}{\sin(v+\varphi_1)+f_1{}^1\cos(v+\varphi_1)},$$

$$N = \frac{(Q-f_1{}^1P)\cos\varphi_1}{\sin(v+\varphi_1)+f_1{}^1\cos(v+\varphi_1)},$$

dagegen, wenn $v > 90^0$ ist, unter die Form

$$N^1 = \frac{Q\cos(v+\varphi_1)+P\sin(v+\varphi_1)}{\sin(v+\varphi_1)-f_1{}^1\cos(v+\varphi_1)},$$

$$N = \frac{(\varphi+f_1{}^1.P)\cos\varphi}{\sin(v+\varphi_1)--f_1{}^1\cos(v+\varphi_1)},$$

und man sieht, daß hier keine Bogenstützung gegen LC eintreten kann, oder daß L im zweiten Falle null würde, während dies sehr wohl im ersten Falle eintreten könnte, wenn der positive Werth z^1 von z oder $h-\text{cotg}v$ aus der Gleichung

$$Q = f_1{}^1.P,$$

d. i.

$$=(h+z^1)=f_1{}^1 tg^2\tfrac{1}{2}\alpha_1(z^{1^2}+2az^1)$$

wirklich diesem Falle angehört, oder wenn man

$$z^1 \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha_1 \left\{ \tfrac{1}{2}c \operatorname{cotg}\varphi_1{}^1 \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha_1 - a\,tg\tfrac{1}{2}\alpha_1 + \sqrt{(\tfrac{1}{2}c.\operatorname{cotg}\varphi_1{}^1 \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha_1 - a\,tg\tfrac{1}{2}\alpha_1)^2 + ch_1 \operatorname{cotg}\varphi_1{}^1} \right\} < h$$

hat, welche Bedingung auf die folgende

$$h > 2 \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha_1 (c \operatorname{cotg}\varphi_1{}^1 \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha_1 - a\,tg\tfrac{1}{2}\alpha_1)$$

zurückkommt, und die erfordert, daß die Längen $h=\alpha C, c=AC$ und $a=\frac{1}{2}AA^1$, 2c. (Figur 54) unter einander gewisse, in jedem Falle leicht zu findende Größenrelationen unter einander haben.

Da aber diese verschiedenen Ausdrücke voraussetzen, daß das Belastungsprisma ABB^1A^1, oder das mit ihm gleich große, eine unbegrenzte Basisbreite habe, so ist es gut, sich daran zu erinnern, (§. 268) daß die Resultate aufhören würden, anwendbar zu sein, wenn der Werth von $AX=z^1 tg\frac{1}{2}\alpha_1$ in Bezug auf z^1, größer würde als AB, oder wenn man nicht mehr $z^1 < AB.\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha_1$ gleichzeitig mit $z^1 < h$ hätte. Da jeder Werth von z, der größer ist als z^1 und diesen Bedingungen genügt, nothwendig zu einer Bogenstützung gegen aC Veranlaßung giebt, wenigstens von unserm Gesichtspunkte aus, wo man die Reibung auf Ab vernachläßigt, so setzt dies implizite voraus, daß das Gewicht der Belastung und der untern Theile direkt durch die Böschung bX oder den Boden LM gehalten wird.

270. Der Druck N^1, der durch die seitliche Bogenstützung gebildet wird, und für den $Q=f_1{}^1P$ ist, wird unmittelbar (§§. 265 und 269) durch den Ausdruck

$$N^1 = P^1 = Q \operatorname{cotg}\varphi_1{}^1 = \tfrac{1}{2}p_1 c(h+z^1) \operatorname{cotg}\varphi_1{}^1$$

gegeben, worin für z^1 sein obiger Werth zu substituieren ist. Bevor wir ihn aber definitiv annehmen, wird es passend sein, zu untersuchen, ob der Ausdruck für N^1, der durch die Bedingung des Maximums (§. 266) gegeben wird, einem Winkel v entspricht, der kleiner oder größer ist als der Winkel v^1, der sich aus der Relation

$$z^1 = h - c.\operatorname{cotg} v^1$$

ergiebt. In dem ersten Falle bestimmt offenbar das Prisma, das diesem Maximum entspricht, und zuerst abzureißen und herunter zu sinken strebt, den Werth von N^1, der alsdann größer ist als der, der Bogenstützung entsprechende $N^1=P^1$. In dem zweiten Falle

kann N^1 keinen Werth erreichen, der größer ist als der fragliche $N^1 = P^1$, da N negativ wird, und die Masse, die unter der durch z^1 oder v^1 bestimmten Ebene liegt, sich ablösen oder nicht mehr gehalten wird. Immer lehrt die Diskussion, daß wenn die Höhe der Belastung oder des Druckes, a, groß genug ist, damit die Bedingung der Bogenstützung erfüllt sei, es beinahe immer sich ereignen wird, daß der entsprechende Winkel v^1 einen kleinern Werth erhält, als der des Maximums, dessen Betrachtung daher vernachläßigt werden kann.

271. Will man übrigens direkt den obigen Werth (§. 269) von $z^1 = Ab$, oder vielmehr den von $z^1 tg \frac{1}{2}\alpha_1 = AX$ in Bezug auf die Bogenstützung konstruieren, so bestimme man mit Hülfe der in Figur 54 angezeigten Operationen: 1) auf der Verlängerung von LC die Entfernung $CR = AC.\text{cotg}\varphi_1{}^1$; 2) auf der Verlängerung von $AA^1, A^1R^1 = \frac{1}{2}CR$, woraus man auf der Horizontale des Punktes A^1, die Entfernung $A^1V^1 = A^1R^1 \text{ cotg } \frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{1}{2}c\,\text{cotg}\varphi_1{}^1.\text{cotg}\frac{1}{2}\alpha_1$ bestimmen kann, indem man R^1V^1 normal auf AI herabläßt; 3) endlich auf der Vertikale der Mitte I^1 von A^1I, die Entfernung $I^1U^1 = \sqrt{hc\,\text{cotg}\varphi_1{}^1} = CT =$ der mittlern Proportionale zwischen Ca und CR; dies giebt $z^1 tg \frac{1}{2}\alpha_1 = I^1V^1 + V^1U^1$, da hier $I^1V^1 = A^1V^1 - A^1I^1$ positiv ist, so daß, wenn man diese Entfernung von A aus auf AD abträgt, oder wenn man sie für den Werth von AX nimmt, es leicht ist, daraus den entsprechenden Werth von z^1 oder Ab durch eine Parallele zu bX oder zu AI abzuleiten. Man kann auch auf eine noch einfachere Weise die Bedingung der Bogenstützung finden.

272. Damit diese Konstruktionen, so wie die vorigen, und alle Untersuchungen, die sich daran knüpfen, auf den Fall angewendet werden können, wo die Basis AB der Belastung um eine gewisse Größe h eingesunken ist unter das äußere Niveau AC, hat man nur h um $2h^1$ in den Werthen von Q und von z^1 (§. 269) zu vermehren; dies giebt insbesondere für die Bedingung, welche die Möglichkeit der Bogenstützung ausdrückt

$$h^2 - 2(c.\text{cotg}\varphi_1{}^1 \text{ cotg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 - a)h > 2ch^1 \text{cotg}\varphi_1{}^1 . \text{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1,$$

zu der noch die folgende hinzugefügt werden muß,

$$AB > z^1 tg \tfrac{1}{2}\alpha_1;$$

löst man sie in Bezug auf h auf, so kann sie durch ein ähnliches Verfahren, wie §. 271 konstruiert werden, indem man $2c$ und h^1 anstatt c und h setzt.

Wenn, wie bei bekleideten Kavalieren einer Festung, wo die Wand LC die innere Seitenwand der Hauptbekleidung darstellen kann, der tiefste Gegenstand, die Erdmasse, die zwischen dieser Wand und der vertikalen Ebene AbS liegt, ein Profil von beliebiger Form hätte, so würde es noch hinreichen, um die Aufgabe auf die unsrige zurückzuführen, den über dem Niveau von AB liegenden Theil der Masse in ein vertikales rechtwinkliges Prisma umzuändern, dessen Basis AC ist; dies kann immer leicht nach bekannten geometrischen Sätzen geschehen.

273. Was die Frage nach der Bogenstützung gegen die Wand LC im allgemeinen betrifft, so kann man bemerken, daß, wenn die §. 269 angezeigten Bedingungen erfüllt sind, d. h. wenn das Erdprisma $abAC$, oder dasjenige, welches dasselbe vorstellt, durch seine Reibung, in Folge des horizontalen in Ab wirkenden Druckes (§. 264) gegen diese Wand, gehalten wird, dasselbe à fortiori von allen analogen Prismen gelten muß, die durch eine ebene vertikale, zwischen aC und Ab liegende, Schicht begrenzt werden. Dieser Zustand der Stabilität ist aber, wie schon an demselben Orte erwähnt ist, der Annahme unterworfen, daß das zwischen den vertikalen Ebenen AS und BS^1, die der Basis der Belastung als Grenzen dienen, enthaltene Erdprisma direkt durch den Boden LM gehalten werde, oder durch die Bogenstützung, die sich in dem oberen Theile jeder Seite der vertikalen Schicht GV bildet, die in gleicher Entfernung von diesen nämlichen Ebenen liegt, und zur natürlichen und gegenseitigen Stütze für solche symmetrische Prismen dient, wie $AbcV$, Bb_1cV oder Cac^1V, Da_1c^1V, die sich andererseits an die Wände CL und DM, oder an die Schichten Ab und Bb, stützen, an denen sie durch die Reibung festzuhalten streben.

Um die Aufgabe unter diesem neuen Gesichtspunkte zu behandeln, und im allgemeinen den Zustand der Stabilität der Erde zu erkennen, die zwischen den Schichten AS und BS^1 enthalten ist, muß man im Innern der Masse Ab^1c^1V z. B. solche Bruchebenen betrachten, wie bc, die von demselben Punkte b der Linie AS ausgehen und bis zur mittlern Ebene GV gehen, und dann zusehen,

wie das Prisma $AbcV$, auf das sein eignes Gewicht und das der halben Belastung ABB^1A^1 wirken, durch die in Ab, mittelst der horizontalen Pressungen P, die im Gegentheile (§. 220) ohne Reibung auf cV wirken, hervorgebrachte Reibung in Gleichgewicht gebracht werden kann. Dies Problem ist dem schon vorhin behandelten (§. 266 ff.) ganz ähnlich, und läßt den größten Werth des Druckes N^1 auf Ab, die Reibung f_1N und die rückwirkende Kraft F oder $N\sqrt{1+f_1^2}$ auf die Fläche bc auffinden, deren Kenntnis dann den Druck auf ab und endlich die wirkliche Belastung der horizontalen Ebene aa_1 in Folge der auf beiden Seiten von GV stattfindenden Symmetrie, berechnen lehrt.

274. Es ist aber einfacher, und läuft fast auf dasselbe hinaus, wenn man nur solche Bruchebenen, wie ab^1o^1 oder $a_1b_1c^1$ betrachtet, die bis cC gehen, d. h. die ganzen Prismen ac^1VC, a^1c^1VD, die sich gegen c^1V stützen; dies kann nach den nämlichen Methoden geschehen, man braucht nur den Theil des Belastungsprismas von der Höhe $a=\frac{1}{2}AA^1$ (§. 271) und von der Dichtigkeit p_1, der auf $AV=\frac{1}{2}e$ wirkt, in einen andern von der Dicke

$$\frac{AA^1.AV}{2.CV}=\frac{a.e}{2c+e}$$

zu verwandeln, der gleichförmig auf die Ausdehnung von $CV=c+\frac{1}{2}e$ vertheilt ist. Fügt man dann zu dem Gewichte des Prismas aa_1c^1 das doppelte der vertikalen Komponente von der Reaktionskraft F auf ab^1c^1 hinzu, wenn N positiv ist, so erhält man den Druck auf aa_1, dessen Unterschied mit dem Gewichte der Belastung des Prismas aa_1DC den Werth des Abzuges giebt, den das Vorhandensein der Seitenwände Ca und Da_1, oder CL und Dm, wenn man mit der ganzen Höhe CL gerechnet hat, verursacht. Da dieser Abzug am größten für $N=o$ wird, wo die Bogenstützung vollständig ist (§. 269) so wird der Druck auf den Boden dann auf das Gewicht des Prisma aa_1o^1 reduziert, das bis zu den entsprechenden Bruchebenen ac^1 und a_1c^1 oder bis zu den ihnen analogen Endpunkten von L und M geht.

275. Die Diskussion in Bezug auf eine solche Bogenstützung wird sowohl für das ganze Prisma Cac^1V, als auch für das Partialprisma $AbcV$ sehr schwierig, wie man dies aus den Bemer-

kungen der Note zu §. 268 sehen kann, wenn die Wände LC und MD der Belastungsmasse sehr nahe sind, oder wenn die horizontale Oberfläche aa_1, deren vertikale Belastung man bestimmen will, sehr wenig von der Basis dieser Masse verschieden ist; denn alsdann muß man auf die Rückwirkung dieser Wände Rücksicht nehmen, wie dies das Resultat bekannter Versuche beweis't. Für unsern Zweck genügt es, als Beispiel den sehr einfachen Fall anzunehmen, wo das Terrain und die Belastung eine nahe unbegrenzte Ausdehnung in horizontaler Richtung, in Vergleich zu der Oberfläche aa_1 haben.

In diesem Falle wird die Bedingung

$$f_1{}^1 P = Q$$

für die vollständige Bogenstützung des Prismas $ac^1 VC$, wenn man e_1 die Breite aa_1 dieser letztern Oberfläche nennt, und bemerkt, daß man hier $f_1{}^1 = \operatorname{cotg}\alpha_1$ hat, da LC und MD fingierte Ebenen sind, offenbar die folgende (§. 269)

$$\operatorname{cotg}\alpha_1\, tg^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 (z^{1\,2} + 2az^1) = \tfrac{1}{2} e_1 (2a + h + z^1),$$

wo z^1 die unbekannte Höhe von $c^1 V$ vorstellt, die mittelst $h = aC$ und $CV = \frac{1}{2}e_1 = c + \frac{1}{2}e$ die Neigung der symmetrischen Bruchlinien ac^1 und $a_1 c^1$ giebt.

Hieraus erhält man, wie §. 269, für die Bedingung der vollständigen Bogenstützung oberhalb aa_1

$$z_1 = \tfrac{1}{4} e_1\, tg\,\alpha_1 \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 - a + \sqrt{(\tfrac{1}{4} e_1\, tg\,\alpha_1 \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 - a)^2 + \tfrac{1}{2} e_1 (2a + h)\, tg\,\alpha_1 \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1} < h,$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft

$$h^2 + (2a - e_1\, tg\,\alpha_1 \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1) h > a e_1\, tg\,\alpha_1 \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1,$$

$$h > \tfrac{1}{2} e_1\, tg\,\alpha_1 \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 - a + \sqrt{(\tfrac{1}{2} e_1\, tg\,\alpha_1 \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1)^2 + a^2},$$

welche Relationen gleichfalls (§. 269) für begrenzte Belastungen gelten, so lange der obige Werth von z^1 nicht größer ist, als das Produkt $\frac{1}{2} AB . \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha_1$; ist dies nicht der Fall, so muß man in der That statt des Ausdruckes für P, der in diesen Rechnungen gebraucht ist, den der schon zitierten Note (§. 268) setzen.

276. Hiernach ist es leicht zu beweisen, daß für $a > \frac{1}{2} e_1\, tg\,\alpha_1 . \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2}\alpha_1$, die Bogenstützung um so leichter möglich ist, oder

daß die Grenze von h, unter der sie stattfindet, um so geringer ist, als die Belastungshöhen a selbst größer sind; mit andern Worten wird sich also die Stabilität mit diesen Höhen vermehren.

Nimmt man umgekehrt das Terrain als horizontal und ohne Belastung an, so erfordert die vollständige Bogenstützung, indem man immer die Kohäsion, u. s. w. vernachläßigt,

$$h \text{ oder } aC > e_1 \, tg\alpha_1 \cot g^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 = 2e_1 \frac{\cot g \tfrac{1}{2} a_1}{1 - tg^2 \tfrac{1}{2} a_1},$$

und sie wird also um so leichter, als die horizontale Breite e_1 von aa_1 selbst kleiner und α_1 näher gleich 60^0 wird; dieser Winkel macht für den Fall des Minimums von $tg\alpha_1 \cot g^2 \frac{1}{2}\alpha_1$ d. i. für Flüßigkeiten, wofür man $tg\frac{1}{2}\alpha_1 = 1$ hat, h unendlich groß, oder die Bogenstützung unmöglich.

277. Nimmt man $e_1 = 4^m, \alpha_1 = 45^0$, so findet man $h > 23^m$, 32; wollte man folglich in einem solchen, homogen und ohne Kohäsion gedachten, Boden eine unterirdische Konstruktion von 4^m horizontaler Breite herstellen, so müßte man sie um diese Größe unter das obere Niveau des Bodens einsenken, damit sie nur das Gewicht des Prismas ac^1a_1 zu tragen hätte; ihre Belastung würde selbst vollkommen null, wenn man ihrer äußern Oberfläche die doppelte Neigung der Linien ac^1 und a_1c^1, die dem Werthe $z^1 = 14^m$,83 entspricht, d. i. ungefähr eine Neigung von $13^0 15'$ gegen die Vertikale gäbe.

Wir wollen aber nicht weiter in diese Aufgabe eindringen, noch auch das Resultat mit den Versuchen von Moreau und Niel vergleichen, denn dies würde, wie schon §. 275 bemerkt ist, erfordern, daß man auf den Einfluß der Reaktion der festen Wände auf den Zustand des Gleichgewichtes des Systems Rücksicht nähme.

278. Wir wollen wieder zu dem gewöhnlichen Falle der Fundierung auf Sand zurückgehen, bei dem die vertikalen Schichte LC und MD (Figur 54) in jedem ihrer Punkte dem Drucke dieses Sandes weichen können, und nur in Folge des Druckes der anliegenden Erde widerstehen. Hat man nach den obigen geometrischen Methoden (§. 265 ff.) die Werthe von N^1 bestimmt, die verschiedenen Lagen des a auf LC entsprechen, so nehme man sie für die horizontalen Ordinaten einer Kurve, die die entsprechenden Längen

aC zu Abszissen hat, und mit der man in jedem Punkte diejenige zu vergleichen hat, welche durch die Hebkraft $\frac{1}{2}p_1 \cot g^2 \frac{1}{2}\alpha . h^2$ des natürlichen Terrains, fast ebenso wie §§. 220 ff., gegeben wird.

Hierdurch wird man für die verschiedenen Tiefen, wenn das Terrain der Wirkung des innern Druckes zu weichen vermag, oder nicht, und für den Fall eines Ueberschußes an Hebkraft, erkennen, in welcher Tiefe sich Bogenstützungen bilden, die im Stande sind, den vertikalen Druck auf den Boden der Ausgrabung zu vermindern, u. s. w.

Was den Fall betrifft, für den in Folge der größern Ausdehnung, die man der Sandschicht gegeben hat, oder in Folge ihrer geringern Dicke, der fragliche Druck eine hinlänglich große Intensität behält, so muß man zusehen, ob diese Intensität, die man nach §. 274 findet, nicht das seitliche Herabrollen der untern Lagen des natürlichen Bodens erzeugen kann (§. 224); hierzu gelangt man ohne Schwierigkeit, wenn man diesen nämlichen Druck als gleichförmig auf die horizontale Basis LM der Ausgrabung vertheilt annimmt.

279. Denn nennt man a_1 die Höhe des vertikalen Erdprismas von der Dichtigkeit p_1, dessen Gewicht diesem Drucke gleich ist, h_1 die ganze Tiefe CL der Ausgrabung, oder des äußern Bodens über LM, p und α endlich die Dichtigkeit und den Winkel der natürlichen Böschung der Erde, die sich in dieser Schicht und in diesem Boden befindet, mit der Vertikale, so muß man nach den Bemerkungen §. 226

$$p_1 a_1 < p h_1 \cot g^4 \tfrac{1}{2}\alpha$$

haben, damit die Stabilität der untern Lagen vollständig gesichert sei, selbst in den Punkten, die LM am nächsten liegen, wo sie am günstigsten ist.

Betrachtet man besonders den Fall, wo die Sandschicht LM DC weit genug nach horizontaler Richtung ausgedehnt ist (§§. 257 ff.) damit die seitlichen Bogenstützungen vermieden werden, so wird $p_1 e_1 a_1$ nahe gleich $p_1 ea + p_1 e_1 h_1$, und die Bedingung der Stabilität wird,

$$p_1 ea < e_1 h_1 (p \cot g^4 \tfrac{1}{2}\alpha - p_1)$$

wenn $e = AB$ und $e_1 = LM$ ihre Bedeutung behalten.

Schluß.

Die zuletzt aufgelös'ten Aufgaben gehören zu den wichtigsten über die Stabilität der Erdbekeidungen; sie knüpfen sich an eine große Anzahl anderer, in Bezug auf den gegenseitig auf einander ausgeübten Einfluß der Fundamente von Werken, die nahe bei einander, aber in verschiedenem Niveau liegen, wie dies häufig bei Befestigungswerken, namentlich bei bekleideten Kavalieren der Fall ist. Zeit und Raum gestatten es nicht, zu zeigen, wie man mit Hülfe der, in den beiden letzten Abschnitten aufgestellten Prinzipien, diese neuen Aufgaben angreifen muß; das vorige kann auf den Weg der Auflösung führen und ich beschränke mich darauf, diese wichtige Anmerkung angedeutet zu haben.

Ich will aber noch eine letzte Bemerkung zu den schon früher gemachten hinzufügen. Mehre allgemeine Auflösungen, zu denen wir gelangt sind, können komplizirt langwierig und beschwerlich in der Anwendung für diejenigen erscheinen, die noch keine Geläufigkeit dabei erlangt haben; man muß aber beachten, daß meistens die Dimensionen des Mauerwerkes nach dem Gebrauche oder nach erlangter Erfahrung bestimmt werden, und daß es nur darauf ankommt, sie unter günstigen Umständen zu berichtigen.

Diese a posteriori gemachten Berichtigungen sind immer leicht, wie die angeführten besondern Beispiele es beweisen. In dieser Beziehung sowohl, als auch in Berücksichtigung der Einfachheit scheinen mir die geometrischen Auflösungen vorzüglicher, als die analytischen, und ich hoffe, in dieser Beziehung den Ingenieuren durch die vorige Untersuchung nützlich geworden zu sein.

Anmerkung über die analytischen Relationen zwischen dem Druck und der Hebkraft der Erde.

Man betrachte namentlich den Fall, wo die Füllungen im Profil durch eine sanft geneigte, bis zur Krone H der Stützebene BH (Figur **23** und **24**) §§. **161.** seqq., verlängerte, Linie unbestimmt begrenzt sind, und zwar zuerst denjenigen (§§. **164. 165**), wo die Linie HE horizontal und die Reibung gegen BH oder bH

null d. h. $\varphi_1 = o$ vorausgesetzt ist; man nenne zur Erleichterung $\lambda = 90^0 \pm \varepsilon$ den stumpfen oder spitzen Winkel, welchen die Böschung BH dann nach außen zu mit der Verlängerung von EH, oder nach innen zu mit der Horizontale des Punktes b oder B macht, so hat man nach dem §§. 164 und 165 gesagten wenn man zugleich (§§. 140 und 164) bemerkt, daß die Winkel bMH, HbO und OHk hier alle drei gleich sind φ oder $90^0 - \alpha$

1) in dem Fall (Figur 23) des Druckes, für den die Bruchlinie bX den Winkel $HbM = \lambda - \varphi$ in zwei gleiche Theile theilt und wo Hx ebenso den Winkel bHk theilt

$$HbX = bHx = \tfrac{1}{2}(\lambda - \varphi), bxH = 180^0 - (bHx + Hbx) = 180^0 - \tfrac{1}{2}(\lambda + \varphi)$$

2) für dem Fall (Figur 24) der Hebkraft, für den die Bruchlinie bX das Supplement des Winkels $HbM = \lambda + \varphi$ in zwei gleiche Theile theilt und wo Hx ebenso das Supplement des Winkels bHK theilt

$$HbX = 180^0 - bHx = \tfrac{1}{2}(\lambda + \varphi), bxH = 180^0 - bHx - Hbx = \tfrac{1}{2}(\lambda - \varphi).$$

Bezeichnet man daher immer durch P und B die respektiven Intensitäten des Druckes und der Hebkraft und durch ω und ω_1 die entsprechenden Werthe $\frac{1}{2}(\lambda - \varphi)$ und $\frac{1}{2}(\lambda + \varphi)$ des Bruchwinkels HbX; bemerkt man ferner, daß ObM gleich ist dem Winkel λ im Fall der Figur 23 und gleich seinem Supplemente für Figur 24, so erhält man endlich (§. 161) durch die Betrachtung des Dreiecks bxH, den Druck

$$1)\ P = \tfrac{1}{2} p \sin ObM . \overline{bx}^2 = \tfrac{1}{2} p \sin\lambda . \overline{bH}^2 , \frac{\sin^2 bHx}{\sin^2 bxH}$$

$$= \tfrac{1}{2} p \sin\lambda \frac{\sin^2\omega}{\sin^2\omega_1} . \overline{bH}^2$$

und die Hebkraft

$$2)\ B = \tfrac{1}{2} p \sin ObM . \overline{bx}^2 = \tfrac{1}{2} p \sin\lambda . \overline{bH}^2 \frac{\sin^2 bHx}{\sin^2 bxH} = \tfrac{1}{2} p \sin\lambda \frac{\sin^2\omega_1}{\sin^2\omega} \overline{bH}^2$$

Da nun Figur 23 der Winkel $Hbx = \omega = \frac{1}{2}(\lambda - \varphi) = \frac{1}{2}(\alpha \pm \varepsilon)$ und für Figur 24 des Winkels $HbX = \omega_1 = \frac{1}{2}(\lambda + \varphi) = 90^0 - \frac{1}{2}(\alpha \mp \varepsilon)$ ist, so erhält man zwischen P und B die merkwürdige Relation

$$\frac{P}{B} = \frac{\sin^4\omega}{\sin^4\omega_1} = \frac{\sin^4 \frac{1}{2}(\lambda - \varphi)}{\sin^4 \frac{1}{2}(\lambda + \varphi)} = \frac{\sin^4 \frac{1}{2}(\alpha \pm \varepsilon)}{\cos^4 \frac{1}{2}(\alpha \mp \varepsilon)}$$

die dazu dienen kann, direkt die Hebkraft mittelst des Druckes in den gegenwärtigen Annahmen zu berechnen, wo nämlich HE horizontal und φ_1 oder die Reibung auf BH null ist.

Für den besondern Fall, wo die Wand bH vertikal ist, ist $\lambda=90^0, \varepsilon=o$ und die Formeln werden, da $\cot g\,\alpha=f$ ist

$$P=\tfrac{1}{2}p\,tg^2\,\tfrac{1}{2}\alpha\,\overline{bH}^2=\tfrac{1}{2}p(\sqrt{1+f^2}-f)^2.\overline{bH}^2$$

$$P=\tfrac{1}{2}p\cot g^2\,\tfrac{1}{2}\alpha\,\overline{bH}^2=\tfrac{1}{2}p(\sqrt{1+f^2}+f)^2.\overline{bH}^2$$

$$\frac{B}{P}=tg^4\,\tfrac{1}{2}\alpha=\left(\frac{\sqrt{1+f^2}-f}{\sqrt{1+f^2}+f}\right)^2$$

Garidel, dem ich im Frühjahr 1836 die Hauptresultate meiner geometrischen Untersuchungen mittheilte, erklärte sogleich, er sei schon seit mehren Jahren zu analogen Resultaten auf dem rein analytischen Wege gelangt. Das folgende hat mir Garidel wörtlich um diese Zeit mitgetheilt; es erscheint dabei das Minimum des Erddrucks auf die Ebene BH, um es nochmals zu wiederholen, nur als eine einfache Grenze, welche der wirkliche Druck nie erreichen kann, und von der er weit genug entfernt bleibt, um nie bei der Anwendung berücksichtigt werden zu brauchen. Diese Ansicht ist sehr verschieden von der, nach welcher das Minimum B als ein wirklicher Widerstand oder als eine Hebkraft in diesem Werke betrachtet ist, auf die man in vielen wichtigen Fällen Rücksicht nehmen muß.

»1) Nennt man P die Gegenwirkung der Erdbekleidung bH, die gleich und entgegengesetzt dem Druck ist, P_1 die Gegenwirkung der Böschung bX, nach welcher der Bruch zu erfolgen sich bestrebt, R den Widerstand in Folge der Reibung und der Kohäsion auf bX, h die vertikale Höhe des Prisma bHX oder die Entfernung seiner Spitze b von der Basis HX, die als horizontal angenommen wird; c die Kohäsion der Erde auf die Einheit der Oberfläche; ω, ε und α die Winkel, welche respektive die Böschung bX, die Böschung bH und die natürliche Böschung der Erde mit der Vertikale des Punktes b bilden: so kann man unmittelbar das Gleichgewicht zwischen den drei Kräften P, P_1, R und dem Gewichte Q des Prisma's erhalten, wenn man einzeln die Summe der vertikalen und horizontalen Komponente $=o$ setzt. Dann wird

$$P_1 \sin(\omega - \varepsilon) + P \sin\varepsilon - Q + R\cos(\omega - \varepsilon) = o$$

$$-P_1 \cos(\omega - \varepsilon) + P\cos\varepsilon + R\sin(\omega - \varepsilon) = o$$

$$Q = \tfrac{1}{2} p h^2 [tg(\omega - \varepsilon) + tg\,\varepsilon] = \frac{p h^2 \sin\omega}{2\cos\varepsilon\cos(\omega - \varepsilon)}$$

$$R = P_1 \operatorname{cotg}\alpha + \frac{ch}{\cos(\omega - \varepsilon)}$$

woraus

$$P_1[\sin(\omega-\varepsilon) + \operatorname{cotg}\alpha\cos(\omega-\varepsilon)] + P\sin\varepsilon - \frac{p h^2 \sin\omega}{2\cos\varepsilon\cos(\omega-\varepsilon)} + ch = o$$

$$P_1[\operatorname{cotg}\alpha\sin(\omega-\varepsilon) - \cos(\omega-\varepsilon)] + P\cos\varepsilon + \frac{ch}{\cos(\omega-\varepsilon)}\sin(\omega-\varepsilon) = o$$

und folglich

$$P\left\{\begin{matrix}\sin\varepsilon\cos\alpha\sin(\omega-\varepsilon) - \cos(\omega-\varepsilon)\sin\alpha\sin\varepsilon - \cos\varepsilon\sin\alpha\sin(\omega-\varepsilon) \\ -\cos\varepsilon\cos\alpha\cos(\omega-\varepsilon)\end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{p h^2 \sin\omega\sin(\omega - \alpha - \varepsilon)}{2\cos\varepsilon\cos(\omega-\varepsilon)} + \frac{ch\sin\alpha}{\cos(\omega-\varepsilon)},$$

oder wenn man nach Persy die Produkte der sinus und cosinus durch die linearen Cosinus ersetzt

$$P\cos(\omega-\alpha) = \frac{p h^2 \cos(2\omega - \alpha - \varepsilon) - p h^2 \cos(\alpha + \varepsilon) - 4ch\sin\alpha\cos\varepsilon}{2\cos\varepsilon\cos(\omega-\varepsilon)}$$

und endlich

$$P = \frac{p h^2 \cos(2\omega - \alpha - \varepsilon) - p h^2 \cos(\alpha + \varepsilon) - 4ch\sin\alpha\cos\varepsilon}{2\cos\varepsilon[\cos(2\omega - \alpha - \varepsilon) + \cos(\alpha - \varepsilon)]}$$

Dividiert man diesen Ausdruck oben und unten durch $2\cos\varepsilon$, so wird er

$$\frac{a\cos(u+b) - g}{\cos(u+b) + d}$$

worin u veränderlich, b, g und d konstant sind. Der erste Differentialkoeffizient dieses Ausdrucks ist

$$-\frac{\sin(u+b)}{[\cos(u+b)+d]^2}(ad+g)$$

und der zweite

$$-\frac{\cos^2(u+b)+2\sin^2(u+b)+d\cos(u+b)}{[\cos(u+b)+d]^3}$$

Wird jener null, so wird dieser

$$-\frac{\cos(u+b)}{[\cos(u+b)+d]^2}(ad+g)$$

woraus sich ergiebt, daß P für $u+b=o$ und folglich für $\omega=\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)$ ein Maximum wird.

P wird ein Minimum für $\omega=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)$; allein diese letzte Auflösung ist durchaus der Aufgabe fremd (s. die Bemerkungen §§. **143** und **163**).

»Coulomb hatte auch die Kraft betrachtet, welche fähig ist, ein Prisma auf einer Böschung wie bX Figur **23** in die Höhe zu schieben, und er sagte mit Recht, daß der Druck kleiner sein müßte, als diese Kraft, er hat aber nicht sein Minimum gesucht.

»Wir wollen zuerst seinen Werth, den ich P^1 nenne, suchen; er ist durch das System den folgenden Gleichungen gegeben, wo P_1 noch die Gegenwirkung der Böschung bX bezeichnet

$$P_1\sin(\omega_1-\varepsilon)+P^1\sin\varepsilon-Q-R\cos(\omega_1-\varepsilon)=o$$

$$-P_1\cos(\omega_1-\varepsilon)+P^1\cos\varepsilon-R\sin(\omega_1-\varepsilon)=o$$

wo R und Q die obigen Werthe haben und ω_1 den Winkel der beliebigen Böschung bX mit der Mauerwand bezeichnet. Diese Gleichungen sind bis auf das Zeichen von R dieselben wie oben.

»Hieraus folgt durch dieselben Rechnungen, oder indem man nur die Zeichen von α und c in der Endgleichung ändert,

$$P^1=\frac{ph^2\cos(2\omega_1+\alpha-\varepsilon)-ph^2\cos(\alpha-\varepsilon)-4ch\sin\alpha\cos\varepsilon}{2\cos\varepsilon[\cos(2\omega_1+\alpha-\varepsilon)+\cos(\alpha+\varepsilon)]}$$

Setzt man hier $\sin(u+b)=o$, so erhält man ein Minimum oder ein Maximum, jenachdem man $\cos(u+b)=-1$ oder $\cos(u+b)=+1$ setzt; da wir das Minimum suchen, müßen wir setzen

$\sin(u+b)=o$ und $\cos(u+b)=-1$, woraus $u+b=\pi$ und

$$\omega_1=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)$$

Hieraus erhält man, wenn man durch P^1 und P die beiden Grenzen des Druckes bezeichnet

$$P^1 = \frac{ph^2}{2\cos\varepsilon}.\frac{1+\cos(\alpha-\varepsilon)}{1-\cos(\alpha+\varepsilon)} + \frac{2ch\sin\alpha}{1-\cos(\alpha+\varepsilon)}$$

$$P = \frac{ph^2}{2\cos\varepsilon}.\frac{1-\cos(\alpha+\varepsilon)}{1+\cos(\alpha-\varepsilon)} - \frac{2ch\sin\alpha}{1+\cos(\alpha-\varepsilon)}$$

oder auch

$$P^1 = \frac{ph^2}{2\cos\varepsilon}.\frac{\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)} + \frac{2ch\sin\alpha}{\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}$$

$$P = \frac{ph^2}{2\cos\varepsilon}.\frac{\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}{\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)} - \frac{2ch\sin\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}$$

oder endlich

$$P^1 = \frac{ph^2}{2\cos\varepsilon}.\frac{\sin^2\omega_1}{\sin^2\omega} + \frac{2ch\sin\alpha}{\sin^2\omega}$$

$$P = \frac{ph^2}{2\cos\varepsilon}.\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\omega_1} - \frac{2ch\sin\alpha}{\sin^2\omega_1}$$

»Setzt man die Kohäsion null, so wird

$$(3)\ P^1 = \frac{ph^2}{2\cos\varepsilon}.\frac{\sin^2\omega_1}{\sin^2\omega}\quad (4)\ P = \frac{ph^2}{2\cos\varepsilon}.\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\omega_1}$$

woraus

$$\frac{P^1}{P} = \frac{\sin^4\omega_1}{\sin^4\omega}$$

für die Grenze des Werthes folgt, den man dem Stabilitätskoeffizienten geben darf.«

»Setzt man $\alpha = 50^0$ und $\varepsilon = o$, so wird $P^1 = \text{cotg}^4\frac{1}{2}\alpha P = \text{cotg}^4 25^0 . P$. Diese Grenze ist ohne Zweifel viel zu stark; man kann sich aber, nur der Merkwürdigkeit wegen, mit der Berechnung des Minimums von P^1 und mit seinem Verhältnisse zu P, so wie mit der Analogie zwischen Pronys und Français Theorem und dem, welches ω_1 giebt, beschäftigen.«

Garidel hatte noch allgemeine Betrachtungen über die Art und Weise beigefügt, wie man gewöhnlich die Theorie des Drucks

der unvollkommenen Flüßigkeiten betrachtet, die aber hier, als nicht zur Sache gehörend, weggelaßen sind.

Wir halten es für ebenso überflüßig, bei der oben nach **Coulomb** ausgesprochenen Meinung über die Kraft P^1, als Grenze des wirklichen Drucks der Erde betrachtet, stehen zu bleiben; wir können in dieser Beziehung nur auf die Betrachtungen §. 137 verweisen, wo sie hinlänglich besprochen ist. Was die zuletzt erhaltenen Formeln (3) und (4) betrifft, so fallen sie genau mit denen (1) und (2) zusammen, die wir auf rein geometrischen Wege erhalten haben, indem $h = bH.\cos\varepsilon$ ist. Es bleibt uns aber noch zu zeigen übrig, daß diese Vereinfachungen der Formeln nicht mehr statt finden, wenn HE (Figur 23 und 24) geneigt ist, nnd wenn man auf die Reibung gegen die Wand bH Rücksicht nimmt.

Geht man auf die allgemeine Auflösung §§. 161 seqq. zurück und auf die sie begleitenden geometrischen Betrachtungen; verfährt man übrigens aber, wie wir es im Anfang dieser Anmerkung für den besondern Fall gethan haben, so gelangt man ohne Schwierigkeit auf die folgenden Resultate.

Nennt man immer ω den Winkel HbX des Bruchprismas, λ den Winkel, den bH mit der Horizontale des Punktes b, nach der Erdseite zu bildet, φ und φ^1 die Reibungswinkel der Erde gegen einander und gegen bH, endlich β den Winkel, welchen die Linie HE mit der Horizontale H nach der Erde zu bildet, und bemerkt überdies, daß der Winkel $ObH = \varphi + \varphi^1$ (§. 140) ist, so hat man offenbar für den Fall Figur 23 oder für den Druck

$$ObM = \lambda + \varphi^1, oHb = \lambda \mp \beta, OMb = oHb - HbM = \varphi \mp \beta$$
$$bOH = 180^0 - ObH - OHb = 180^0 - (\varphi + \varphi_1) - (\lambda \mp \beta),$$

wo die obern oder untern Zeichen zu nehmen sind, je nachdem die Linie HE nach außen oder nach innen in Bezug auf die Füllung gerichtet ist. Wegen der Proportionalität der Seiten zu den sinus in den Dreiecken ObX, ObH, und ObM findet man ferner die Ausdrücke für die Linien OX, OH und OM, die in der Bedingungsgleichung (§. 161) $\frac{\overline{OX}^2}{\overline{Ob}^2} = \frac{OH.OM}{Ob.Ob}$ vorkommen, als Funktionen von Ob und bekannten trigonometrischen Linien. Hieraus erhält man zur Bestimmung von ω die neue Bedinggungsgleichung

$$\frac{\sin^2(\varphi+\varphi^1+\omega)}{\sin^2(\lambda\mp\beta-\omega)}=\frac{\sin(\varphi+\varphi^1)\sin(\lambda+\varphi^1)}{\sin(\varphi\mp\beta)\sin(\lambda\mp\beta)}$$

aus der die obige einfache Relation $\omega=\frac{1}{2}(\lambda-\varphi)$ folgt, wenn β^1 und β null angenommen werden. Aus ihr folgt

$$tg\,\omega=\frac{k\sin(\lambda\mp\beta)-\sin(\varphi+\varphi^1)}{\cos(\lambda\mp\beta)+\cos(\varphi+\varphi^1)},$$

wo

$$k=\sqrt{\frac{\sin(\varphi+\varphi^1)\sin(\lambda+\varphi^1)}{\sin(\varphi\mp\beta)\sin(\lambda\mp\beta)}}$$

eine absolute Zahl ist, die durch Logarithmen berechnet werden kann. Mit ihrer Hülfe findet man dann $tg\,\omega$ und ω.

Da die Linie Xx parallel zu bM (§. 161) ist, so findet man ebenso durch die Dreiecke bxM und ObM den Werth des Druckes

$$P=\tfrac{1}{2}p\sin ObM.\overline{bx}^2=\tfrac{1}{2}p\sin(\lambda\mp\varphi^1)\overline{MX}^2\frac{\overline{Ob}^2}{\overline{OM}^2}$$

oder

$$P=\tfrac{1}{2}p\sin(\lambda+\varphi^1)\frac{\sin^2(\lambda\mp\beta)\sin^2(\lambda-\varphi-\omega)}{\sin^2(\lambda+\varphi^1)\sin^2(\lambda\mp\beta-\omega)}\overline{bH}^2$$

welcher Ausdruck durch Logarithmen berechnet werden kann, wenn ω einmal bekannt ist, und aus dem der obige besondere Werth von P folgt, wenn man darin φ^1 und β null, so wie $\omega=\frac{1}{2}(\lambda-\varphi)$ setzt.

Da aber anderseits aus den geometrischen Bedingungen des Problems folgt

$$\overline{OX}^2=OH.OM,\ bx=\frac{Ob}{OM}MX=\frac{Ob}{OM}(OM-OX)=Ob\left(1-\frac{Ob.OX}{OM.Ob}\right)$$

so ergiebt sich daraus, daß man auch direkt den Werth von P durch die Formel

$$P=\tfrac{1}{2}p\sin(\lambda+\varphi^1)\frac{\sin^2(\lambda\mp\beta)}{\sin^2(\varphi+\varphi^1+\lambda\mp\beta)}\left\{1-k\frac{\sin(\varphi\mp\beta)}{\sin(\lambda+\varphi^1)}\right\}^2\overline{Hb}^2$$

oder

$$(5)\ P=\tfrac{1}{2}p\sin(\lambda+\varphi^1)\frac{\sin^2(\lambda\mp\beta)}{\sin^2(\varphi+\varphi^1+\lambda\mp\beta)}\times$$

$$\left\{1-\sqrt{\frac{\sin(\varphi+\varphi^1)\sin(\varphi\mp\beta)}{\sin(\lambda+\varphi^1)\sin(\lambda\mp\beta)}}\right\}^2\overline{bH}^2$$

die man übrigens sogleich aus der zuerst erhaltenen finden würde, wenn man die Werthe für ω und $tg\omega$ substituierte.

Betrachtet man nun die Gerade Ob und die Dreiecke, deren gemeinschaftliche Spitze im Punkte H liegt, so findet man ebenso wegen der Relation $\frac{\overline{Ox}^2}{\overline{oH}^2}=\frac{Ok}{oH}\frac{Ob}{oH}$, und wenn man den unbekannten Winkel $bHx=u$ setzt

$$\frac{\sin^2(\lambda\mp\beta-u)}{\sin^2(\varphi+\varphi^1+u)}=\frac{\sin(\varphi\mp\beta)\sin(\lambda\mp\beta)}{\sin(\varphi+\varphi^1)\sin(\lambda+\varphi^1)}=\frac{1}{k^2}=\frac{\sin^2(\lambda\mp\beta-\omega)}{\sin^2(\varphi+\varphi^1+\omega)}$$

woraus folgt, daß der Winkel $\omega=u$ und daß folglich die Gerade Hx allgemein der Bruchlinie bX parallel ist, wie dies direkt und einfach §. 165 bewiesen ist.

Man hat daher auch durch das Dreieck bHx

$$P=\tfrac{1}{2}p\sin ObM\frac{\sin^2 bHx}{\sin^2 bxH}\overline{bH}^2=\tfrac{1}{2}p\sin(\lambda+\varphi^1)\frac{\sin^2 u}{\sin^2(\varphi+\varphi^1+u)}\overline{bH}^2$$

oder

$$P=\tfrac{1}{2}p\sin(\lambda+\varphi^1)\frac{\sin^2\omega}{\sin^2(\varphi+\varphi^1+\omega)}\overline{bH}^2.$$

Dieser letzte Ausdruck ist offenbar einfacher, als der zuerst erhaltene, aus dem er durch passende trigonometrische Transformationen abgeleitet werden könnte. Was den Werth von P betrifft, der unmittelbar berechnet werden kann, und den man durch die Relation $Ox^2=Ok.Ob$ oder $bx=Ob-\sqrt{Ok\,Ob}$ erhalten würde, so läßt sich leicht nachweisen, daß er von dem vorigen nicht verschieden ist.

Betrachtet man jetzt den Fall Figur 24 oder die Hebkraft, so findet man ebenso, daß die Gerade Hx auch hier noch parallel zur Bruchlinie bX ist, oder daß der Winkel bHx das Supplement ist von dem Winkel $HbX=\omega_1$ des Prismas vom kleinsten Druck. Man wird ferner zur Berechnung dieses Winkels finden

$$\frac{\sin^2(\omega_1-\varphi-\varphi^1)}{\sin^2(\lambda\mp\beta-\omega_1)}=\frac{\sin(\varphi+\varphi^1)\sin(\lambda-\varphi^1)}{\sin(\varphi\pm\beta)\sin(\lambda\mp\beta)}=k_1{}^2.$$

$$tg\,\omega_1=\frac{k_1\sin(\lambda\mp\beta)+\sin(\varphi+\varphi^1)}{\cos(\lambda\mp\beta)+\cos(\varphi+\varphi_1)}$$

und dann die Hebkraft

$$B=\tfrac{1}{2}p^2\sin(\lambda-\varphi^1)\frac{\sin^2\omega_1}{\sin^2(\omega_1-\varphi-\varphi^1)}bH^2$$

die übrigens wegen $MX=MO+OX$ (Figur 24) unmittelbar gegeben wird durch die Formel

$$6)\ B=\tfrac{1}{2}p\sin(\lambda-\varphi^1)\frac{\sin^2(\lambda\mp\beta)}{\sin^2(\lambda\mp\beta-\varphi-\varphi^1)}$$
$$\left\{1+\sqrt{\frac{\sin(\varphi+\varphi^1)\sin(\varphi\pm\beta)}{\sin(\lambda-\varphi^1)\sin(\lambda\mp\beta)}}\right\}^2 bH^2$$

Vergleicht man diese verschiedenen analytischen Ausdrücke für die Hebkraft mit den entsprechenden für den Druck, so erkennt man, daß sie sich nur durch das Zeichen der Wurzelgrößen und der Winkel φ, φ^1 der Reibung der Erde gegen einander und gegen die Stützebene, unterscheiden, wie man leicht im voraus sehen konnte.

Sucht man das Verhältnis P zu B, so wird dies für den gegenwärtigen allgemeinen Fall

$$\frac{P}{B}=\frac{\sin(\lambda+\varphi^1)\sin^2(\omega_1-\varphi-\varphi^1)\sin^2\omega}{\sin(\lambda-\varphi^1)\sin^2(\omega+\varphi+\varphi^1)\sin^2\omega_1}$$

woraus der frühere spezielle Werth von PB folgt, wenn man darin $\varphi^1=o$, $\omega=\frac{1}{2}(\lambda-\varphi)$ und $\omega_1=\frac{1}{2}(\lambda+\varphi)$ setzt.

Trotz der eleganten Symeterie dieser Formel wird die Weitläufigkeit der nöthigen Rechnungen, um P oder B zu erhalten, dennoch nicht vermindert, da die Formel die unbekannten Größen ω und ω_1 enthält. Es leuchtet ein, daß die so einfachen und allgemeinen geometrischen Konstruktionen auch hier bedeutenden Vortheil vor den Formeln haben und eben deshalb der Natur der Aufgabe mehr angepasst sind, als die trigonometrischen Ausdrücke, zu denen man auch leicht durch die §§. 1 seqq auseinandergesetzte direkte Analysis gelangen würde.

Wir wollen jetzt zu dem allgemeinen Falle Figur **20**, **21** und **22** (§§. **151** seqq) übergehen, wo EF eine solche Fläche der Erdfüllung bedeutet, daß der Punkt des Bruches für verschiedene Lagen von b auf BH immer auf ihr sich befindet. E^1 ist die Spitze eines Dreiecks HEE^1, welches dem Theile des Polygons gleich ist, der durch die Diagonale HE begrenzt wird, und welches auf der vordern Seite der Fläche EF in dem Profile der Füllung liegt. KH ist eine Parallele zur Geraden bE^1, die mit b ihre Lage verändert, u. s. w. (§§. **151** seqq). Man nenne nun β den Neigungswinkel von EF mit dem Horizonte, ferner $\lambda = 90^0 \mp \varepsilon$, denjenigen, welchen BH mit der, durch b nach der Erde zu oder durch G nach außen hin gezogenen, Horizontale macht, so daß man, wie oben, wo H an die Stelle von G trat, hat: Winkel $ObM = \lambda + \varphi^1$, Winkel $OGb = \lambda \mp \beta$, Winkel $OMb = \varphi \mp \beta$, Winkel $bOG = 180^0 - (\varphi + \varphi) - (\lambda \mp \beta)$; wo die obern Zeichen von β demjenigen Falle entsprechen, bei dem die Fläche EF nach außen hin in Bezug auf die Erdfüllung geneigt ist und die unteren, wenn sie nach innen geneigt ist.

Für den gegenwärtigen Fall wird die Bruchlinie bX nicht mehr parallel zur Linie Gx aber wohl zu Kx sein, wovon man sich durch das Räsonnement §. **165** überzeugen kann; die Winkel GbX und bGx, die auch ferner durch ω und u für den Fall des Druckes (Figur **21**) bezeichnet werden sollen sind nicht mehr gleich und OK, vorhin $= OG$, wird jetzt ersetzt durch

$$OG + GK = OG + \frac{GH.GE^1}{bG}$$

da HK parallel zu bE^1 ist.

Bis auf diesen Umstand bleiben alle Räsonnements die frühern, und setzt man auch hier zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{\sin(\varphi + \varphi^1)\sin(\lambda + \varphi^1)}{\sin(\varphi \mp \beta)\sin(\lambda \mp \beta)}} = k \text{ und}$$

$$\sqrt{1 + \frac{\sin(\varphi + \varphi^1 + \lambda \mp \beta)}{\sin(\varphi + \varphi^1)}\,\frac{GH.GE^1}{\overline{bG}^2}} = k^1,$$

so findet man leicht

$$tg\omega = \frac{kk^1 \sin(\lambda \mp \beta) - \sin(\varphi + \varphi^1)}{\cos(\lambda \mp \beta) + \cos(\varphi + \varphi^1)},\ tgu = \frac{k\sin(\lambda \mp \beta) - k^1 \sin(\varphi + \varphi^1)}{k[\cos(\lambda \mp \beta) + \cos(\varphi + \varphi^1)]}.$$

um die Winkel ω und u zu berechnen, und

$$P = \tfrac{1}{2} p \sin(\lambda + \varphi^1) \frac{\sin^2(\lambda \mp \beta) \sin^2(\lambda - \varphi - \omega)}{\sin^2(\lambda + \varphi^1) \sin^2(\lambda \mp \beta - \omega)} \overline{bG}^2$$

$$= \tfrac{1}{2} p \sin(\lambda + \varphi^1) \frac{\sin^2 u}{\sin^2(\varphi + \varphi^1 + u)} \overline{bG}^2$$

um den Druck auf bH zu berechnen, oder entwickelt

$$7)\ P = \tfrac{1}{2} p \sin(\lambda + \varphi^1) \frac{\sin^2(\lambda \mp \beta)}{\sin^2(\varphi + \varphi^1 + \lambda \mp \beta)}$$

$$\left\{ 1 - k^1 \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \varphi^1) \sin(\varphi \mp \beta)}{\sin(\lambda + \varphi^1) \sin(\lambda \mp \beta)}} \right\}^2 \overline{bG}^2.$$

Alle diese Formeln fallen mit den analogen des vorigen Falles zusammen, wenn H mit G zusammenfällt, wodurch $k^1 = 1$ wird.

Um endlich diese letztern Formeln unmittelbar auf die Hebkraft (Figur 22) anwenden zu können, genügt es, überall die Zeichen von φ und φ^1 zu ändern und k, k^1, ω, u und P durch k_1, $k_1{}^1$, ω_1, und B zu ersetzen, die mithin andere Werthe annehmen. Dann wird

$$k_1{}^1 = \sqrt{\left\{ \frac{1 - \sin(\lambda \mp \beta - \varphi - \varphi^1)}{\sin(\varphi + \varphi^1)} \frac{\overline{GH}.\overline{GH^1}}{\overline{bG}^2} \right\}},$$

$$B = \tfrac{1}{2} p \sin(\lambda + \varphi^1) \frac{\sin^2(\lambda \mp \beta)}{\sin^2(\lambda \mp \beta - \varphi - \varphi^1)}$$

$$\left\{ 1 + k_1{}^1 \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \varphi^1) \sin(\varphi \mp \beta)}{\sin(\lambda - \varphi^1) \sin(\lambda \mp \beta)}} \right\}^2 \overline{bG}^2$$

und das Verhältnis $P{:}B$ behält die Form, die für den vorigen Fall gefunden ist, wo H mit G zusammenfällt.

In diesen verschiedenen Ausdrücken ist bG allein mit der Lage b auf BH veränderlich. Bezeichnet man sie durch den Buchstaben z, so kann man folglich den Werth von P oder B auf die einfache Form zurückbringen

$$a(z \mp m\sqrt{b^2 + z^2})^2,$$

wo a, b, m Konstanten sind; hierdurch wird die Aufsuchung des Momentes und des Angriffspunktes des Drucks und der Hebkraft für eine beliebige Ausdehnung von BH, in Bezug auf die Punkte des Bruches X, die zwischen den Endpunkten der gegenwärtig betrachteten Fläche EF des Profils der Erdfüllung liegen, sehr leicht. Es folgt aber aus den Diskussionen §§. **143**, **147** und **158** daß die Werthe der Konstanten a, b, m und die Grenzen der auszuführenden Integrationen, ebenso oft sich verändern werden, als Flächen da sind, bei denen der Bruch möglich ist, und daß die Schwierigkeit der Aufgabe eben in der Aufsuchung dieser Grenzen besteht, so daß folglich der analytische Weg für den fraglichen allgemeinen Fall sehr ermüdend ist.

Anhang.

§. 1. Bei der Bestimmung des Erddruckes auf eine Stützwand und bei der seines Momentes macht **Poncelet** größtentheils stillschweigend folgende Voraussetzungen, deren Richtigkeit und Einfluß näher untersucht werden soll:

1) der Bruch der Erde geschieht nach ebener Fläche;

2) die Dichtigkeit der Erde ist in der ganzen Ausdehnung derselben gleich;

3) die Reibung ist dem Drucke in jedem Punkte proportional;

4) die Reibung der Erde auf der inneren Seite der Stützwand kann vernachläßigt werden, so wie auch

5) die Kohäsion der Erde, da der Stabilität der Stützwand dadurch nur Vortheil erwächst.

Die erste Annahme ist von **Martony** *) nicht nur für den Sand, sondern auch für kohärierende Erde durch Versuche dargethan. Herr Geheimer Oberbaurath **Hagen** **) hat dieselbe für den einfachsten Fall, wo die Erde nur bis zur obern Horizontale der Stützwand geht, und weder Kohäsion noch eine Belastung besitzt, auf folgende Art bewiesen. Nimmt man an, daß das Prisma vom größten Druck nicht durch eine ebene Fläche, sondern durch eine Kurve begrenzt sei, und zwar das auf *AB* (Fig. 1. Tab. 6) wirkende Prisma durch die Kurve *AHC*, so wird eine niedrigere Wand *BE* durch ein Prisma *BEG* gedrückt werden, dessen Kurve *EG* der Kurve *AHC* ähnlich ist; man kann sich hiervon leicht überzeugen, wenn man sich beide Prismen in gleich viele vertikale Schichten getheilt denkt. Denkt man sich nun in die Sandmasse eine Wand *FH* eingeschoben, so wird der Druck auf die Wand *AB* sich zusammensetzen aus dem des Prismas *BAHF* und aus dem auf *FH* ausgeübten Drucke, der sich ganz oder theilweise

---

*) Versuche über den Seitendruck der Erde von **Martony de Köszegh** Wien 1828.

) **Poggendorf, Annalen für Physik und Chemie. Bd. 28 (104) Pag. 17 nd 297. Leipzig 1833. — Handwörterbuch der Physik und Chemie von **August** u. A. Berlin 1842. Artikel Druck.

durch die Sandmasse fortpflanzt. Der Druck auf *AB* wird somit sein Maximum erhalten, wenn der Druck auf *FH* am größten wird. Der Annahme nach geschieht dies aber durch das Prisma *FKH*, das dem Prisma *ABC* ähnlich ist, und es kann somit *BAC* nicht das Prisma vom größten Drucke gewesen sein, sondern es würde dies hier das Prisma *BAHK* sein. Das Prisma vom größten Drucke kann demnach nur durch eine solche Fläche *AC* getrennt werden, deren Querschnitt in jedem einzelnen Theile dem ganzen Querschnitte ähnlich ist; d. h. es muß *AC* eine ebene Fläche sein.

Wenn diese Annahme für zusammengesetztere Fälle nicht in aller Strenge richtig ist, so zeigt doch die Erfahrung, daß die Abweichung nur sehr gering ausfalle.

Die zweite Annahme ist nicht streng richtig, die Dichtigkeit der Erde verändert sich mit der Tiefe, nach einem bis jetzt freilich noch nicht durch Versuche ermittelten Gesetze, und ist die Annahme dadurch gerechtfertigt; im folgenden §. ist jedoch auf die Veränderung dieser Dichtigkeit Rücksicht genommen.

Bei der Gestattung dieser zweiten Annahme ist die der dritten eine nothwendige Folge; wird aber die zweite Annahme nicht vorausgesetzt, wie im folgenden §, so muß auch für die Veränderung der Reibung der Erde ein mathematisches Gesetz angenommen werden.

Die Reibung der Erde auf der innern Seitenwand übt auf die Stabilität der Stützwand einen günstigen Einfluß aus, der zu gering ist, um Uebertreibungen der Mauerstärken veranlaßen zu können, so daß derselbe füglich, der Einfachheit der Formeln wegen, vernachläßigt werden kann.

Dasselbe ist aber nicht mit der fünften Annahme der Fall; die Kohäsion übt bei gewöhnlicher Erde, zumal wenn sie gestampft ist, einen sehr bedeutenden Einfluß aus, sie beträgt nach Martony's Versuchen bei gestampfter natürlich feuchter Dammerde ungefähr **100** Pfund auf den Quadratfuß. Martony hält sogar jede Einführung eines Stabilitätskoeffizienten für überflüßig, sobald man die Kohäsion vernachläßigt, da dies der Mauer schon eine hinreichende Festigkeit gewähre.

§. 2. Die Einführung der Kohäsion in die Rechnungen muß

daher als wichtig erscheinen. Français hat dieselbe auch nicht vernachläßigt; er nimmt dieselbe aber in der ganzen Ausdehnung der Erde als gleich an. Diese Voraussetzung ist aber gleichfalls der Natur nicht angemeßen, so wenig, wie die zweite und dritte. Audoy*) hat allein die Größe des Erddruckes unter allgemeineren Annahmen aufgesucht. Nach ihm ist die Dichtigkeit der Erde und ihre Kohäsion und Reibung veränderlich (die erstere wie die Funktion φ, die zweite wie die Funktion ψ und die dritte als proportional dem Drucke in jedem Punkte, und so, daß ihr mittleres Verhältnis zum Drucke, abgeleitet aus ihrem Gesetze der Veränderung in Bezug auf die Tiefe der Erdmoleküle, dargestellt wird durch $\frac{1}{tg\,\alpha}$, wo α folglich ein mit dieser Tiefe veränderlicher Winkel ist) mit der Entfernung der Moleküle der Erdfüllung von einer horizontalen Ebene LK, die um die Größe k oberhalb der Oberfläche des Terrains liegt. Die übrigen Annahmen behält er bei. In dieser Allgemeinheit führt Audoy dann die Rechnung für gewöhnliche Futtermauern mit geneigter innerer Seitenwand durch, bei denen die Erdfüllung sich nur bis zur Horizontale der Mauerkrone erstreckt. Für den Fall der Halbbekleidungen wird die Auflösung zu verwickelt, da für sie der Winkel des Prismas vom größten Drucke mit der Vertikale nicht mehr sich so einfach darstellen läßt. Die Halbbekleidungen kommen vorzugsweise nur beim Festungsbau vor, und bei ihnen wird man sich wohl immer an das Vauban'sche Profil, wie es von Poncelet benutzt ist, halten. — Anders ist es bei den gewöhnlichen Erdbekleidungen; die Stärke des Vauban'schen Profiles für 10^m Höhe möchte hier nicht immer als Norm anzunehmen sein, und es ist hier beßer, die Bedingungen des strengen Gleichgewichtes aufzusuchen, also die Kohäsion mit in Rechnung zu ziehen, und die so erhaltene Mauerstärke nach Umständen zu verstärken, indem die vorhandenen Versuche noch nicht zur Aufstellung eines normalen Mauprofiles genügen. Sollte es auch nur der Vergleichung mit der Poncelet'schen Formel wegen nützlich sein, so dürfte eine Mittheilung der Audoy'schen Theorie nicht als überflüßig und somit der folgende § rc. als gerechtfertigt erscheinen.

---

*) Mémorial de l'officier du génie Nr. 4. pag, 207.

§. 3. Nennt man vorläufig C die Gesammtkohäsion gegen die Bruchlinie, so wird die Gleichgewichtsgleichung §. 2 pag. 9, wenn die Stützwand mit der Vertikale einen Winkel $=\varepsilon$ bildet.

$$Q\cos(v+\varepsilon)=F\sin(v)+\frac{Q\sin(v+\varepsilon)+F.\cos v}{tg\,\alpha}+C$$

da $f=\operatorname{cotg}\alpha$ ist. Demnach wird

$$\text{(a) } F=\frac{Q\{\cos(v+\varepsilon)tg\,\alpha-\sin(v+\varepsilon)\}-C tg\,\alpha}{\cos v+\sin v\,tg\,\alpha}$$

wo für Q und C ihre Werthe zu setzen sind. Um diese Werthe zu finden, betrachte man ein Element $sgel$ des Druckprismas. Man nenne z seine Entfernung von der Ebene LK, (Figur 2. Pl. 6), p die Dichtigkeit der Erde an ihrer Oberfläche, h die Höhe des Prismas, vermehrt um die Größe k. Die Dichtigkeit des fraglichen Elementes wird dann

$$\frac{p\varphi(z)}{\varphi(k)}$$

und sein Volumen

$$dz(l_1 s-ll_1)=dz(h-z)\{tg(v+\varepsilon)-tg\,\varepsilon\};$$

folglich erhält man für das Gewicht desselben Elementes den Ausdruck

$$\{tg(v+\varepsilon)-tg\,\varepsilon\}\,p(h-z)\frac{\varphi(z)dz}{\varphi(k)}$$

der, von $z=k$ bis $z=h$ integriert, das ganze Gewicht des Prismas oder das Gewicht Q giebt. Setzt man

$$A=\int_k^h p(h-z)\frac{\varphi(z)dz}{\varphi(k)},$$

so wird

$$Q=A(tg(v+\varepsilon)-tg\,\varepsilon).$$

Betrachtet man ferner ein Element sg der Bruchlinie Ru und bezeichnet durch c die Kohäsion der Erde an der Oberfläche für die Längeneinheit, so wird die Kohäsion für die Längeneinheit, im Punkte s

$$=c.\frac{\psi(z)}{\psi(k)}$$

und für das Element og wird sie, da

$$sg = \frac{dz}{\cos(v+\varepsilon)}$$

ist

$$\frac{1}{\cos(v+\varepsilon)} \cdot \frac{\psi(z)}{\psi(k)} \cdot dz.$$

Nimmt man das Integral dieser Kohäsion von $z=k$ bis $z=h$, so erhält man die Kohäsion für die ganze Länge Ru, und setzt man

$$\int_k^h \frac{c}{\psi(k)} \psi(z) dz = B,$$

so wird

$$C = \frac{B}{\cos(v+\varepsilon)}$$

folglich erhält man durch Substitution in (a)

$$\text{(b)}\quad F = \frac{A\{tg(v+\varepsilon) - tg\varepsilon\}\{\cos(v+\varepsilon)tg\alpha - \sin(v+\varepsilon)\} - \frac{B.tg\alpha}{\cos(v+\varepsilon)}}{\cos v + \sin v . tg\alpha.}$$

Um nun das Prisma vom größten Drucke zu finden, muß F in Bezug auf v und h ein Maximum werden. Zuerst möge die Höhe h als konstant angenommen und das Differential von F nur in Bezug auf den veränderlichen Winkel v bestimmt werden, der weder in dem Ausdrucke für A und B noch in der durch den Winkel α dargestellten Funktion vorkommt. Um aber auf eine einfache Form dieses Differentials zu gelangen, woraus sich dann leicht die Veränderliche für das Maximum finden läßt, muß man den Nenner des zweiten Gliedes der Gleichung (b) wegschaffen, und den Zähler dahin bringen, daß er nur in einem einzigen Ausdrucke den veränderlichen Winkel als Faktor von konstanten Gliedern enthalte. Hierzu gelangt man durch folgende Umänderung.

Man setze $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{c s \alpha}$ und reduziere oben und unten auf denselben Nenner, so kommt

$$F = \frac{A\cos(v+\varepsilon)[tg(v+\varepsilon) - tg\varepsilon][\cos(v+\varepsilon)\sin\alpha - \sin(v+\varepsilon)\cos\alpha] - B\sin\alpha}{\cos\alpha . \cos v . \cos(v+\varepsilon) + \sin v . \sin\alpha . \cos(v+\varepsilon)};$$

aber es ist

$$\sin\alpha\cos(v+\varepsilon)-\sin(v+\varepsilon)\cos\alpha=\sin(\alpha-v-\varepsilon),$$

also

$$F=\frac{A.\sin(\alpha-v-\varepsilon)[tg(v+\varepsilon)-tg\,\varepsilon]}{\cos(\alpha-v)}-\frac{B.\sin\alpha}{\cos(\alpha-v)\cos(v+\varepsilon)}.$$

Dann hat man

$$\sin(\alpha-v-\varepsilon)=\sin(\alpha-v)\cos\varepsilon-\sin\varepsilon\cos(\alpha-v)$$

und folglich

$$\sin\frac{(\alpha-v-\varepsilon)}{\cos(\alpha-v)}=tg(\alpha-v)\cos\varepsilon-\sin\varepsilon;$$

ferner ist

$$\cos(\alpha-v)\cos(v+\varepsilon)=\cos(v+\varepsilon)\frac{\sin(\alpha-v)}{tg(\alpha-v)}$$

$$\cos(\alpha-v)\cos(v+\varepsilon)=\cos(\alpha-v)\frac{\sin(v+\varepsilon)}{tg(v+\varepsilon)}$$

oder auch

$$\cos(a-v)\cos(v+\varepsilon)\,tg(\alpha-v)=\sin'(\alpha-v)\cos(v+\varepsilon)$$

$$\cos(\alpha-v)\cos(v+\varepsilon)\,tg(v+\varepsilon)=\cos(\alpha-v)\sin(v+\varepsilon).$$

Addiert man beide Gleichungen und transformiert das zweite Glied des Resultats, so kommt

$$\cos(\alpha-v)\cos(v+\varepsilon)[tg(\alpha-v)+tg(v+\varepsilon)]=\sin(\alpha+\varepsilon)$$

woraus

$$\frac{1}{\cos(\alpha-v)\cos(v+\varepsilon)}=\frac{tg(\alpha-v)+tg(v+\varepsilon)}{\sin(\alpha+\varepsilon)}$$

Man erhält also durch Substition

$$F=A\{tg(v+\varepsilon)-tg\,\varepsilon\}\{tg(\alpha-v)\cos\varepsilon-\sin\varepsilon\}$$

$$-B\sin\alpha\frac{\{tg(\alpha-v)+tg(v+\varepsilon)\}}{\sin(\alpha+\varepsilon)}$$

Nun hat man

$$\sin\alpha = \sin(\alpha+\varepsilon)\cos\varepsilon - \sin\varepsilon\cos(\alpha+\varepsilon), \text{ woraus}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\varepsilon)} = \cos\varepsilon - \frac{\sin\varepsilon}{tg(\alpha+\varepsilon)} = \cos\varepsilon\left(1 - \frac{tg\varepsilon}{tg(\alpha+\varepsilon)}\right)$$

Substituiert man diesen Werth in das zweite Glied des Ausdruckes für F, und setzt in das erste Glied $tg\varepsilon.\cos\varepsilon$ für $\sin\varepsilon$, so kommt

$$\text{(c)} \quad F = A\cos\varepsilon\{tg(v+\varepsilon) - tg\varepsilon\}\{tg(\alpha-v) - tg\varepsilon\}$$
$$-B\cos\varepsilon\{tg(\alpha-v) + tg(v+\varepsilon)\}\left\{\frac{tg(\alpha+\varepsilon) - tg\varepsilon}{tg(a+\varepsilon)}\right\}$$

Ferner ist

$$tg(\alpha-v) + tg(v+\varepsilon) = tg(\alpha+\varepsilon)\{1 - tg(\alpha-v)tg(v+\varepsilon)\}$$
$$tg(\alpha+\varepsilon) - tg\varepsilon = tg\alpha\{1 + tg(\alpha+\varepsilon)tg\varepsilon\}$$

Durch Substitution erhält man also

$$F = A\cos\varepsilon\{tg(v+\varepsilon) - tg\varepsilon\}\{tg(\alpha-v) - tg\varepsilon\}$$
$$-B\cos\varepsilon\{1 - tg(\alpha-v)tg(v+\varepsilon)\}tg\alpha\{1 + tg(\alpha+\varepsilon)tg\varepsilon\},$$

oder, wenn man das im ersten Gliede angezeigte Produkt ausführt

$$F = A\cos\varepsilon\{tg(v+\varepsilon)tg(\alpha-v) - tg\varepsilon[tg(\alpha-v) + tg(v+\varepsilon)] + tg^2\varepsilon\}$$
$$-B\cos\varepsilon\{[1 - tg(\alpha-v)tg(v+\varepsilon)]tg\alpha[1 + tg(\alpha+\varepsilon)tg\varepsilon]\}$$

Wiederholt man sukzessiv die beiden obigen Substitutionen, so erhält man zuerst

$$F = A.\cos\varepsilon\{tg(v+\varepsilon)tg(\alpha-v) - tg\varepsilon tg(\alpha+\varepsilon)[1 - tg(\alpha-v)tg(v+\varepsilon) + tg^2\varepsilon]\}$$
$$-B\cos\varepsilon\{[1 - tg(\alpha-v)tg(v+\varepsilon)]tg\alpha[1 + tg(\alpha+\varepsilon)tg\varepsilon]\}$$

Dann

$$F = A\cos\varepsilon\{tg(v+\varepsilon)tg(\alpha-v) - tg\varepsilon[tg(\alpha+\varepsilon) - tg\varepsilon]\}$$
$$+A\cos\varepsilon\{tg\varepsilon tg(\alpha+\varepsilon)tg(\alpha-v)tg(v+\varepsilon)\}$$
$$-B\cos\{\varepsilon[1 - tg(\alpha-v)tg(v+\varepsilon)]tg\alpha[1 + tg(\alpha+\varepsilon)tg\varepsilon]\}$$

Dann

$$F = A.\cos\varepsilon \{ tg(v+\varepsilon)tg(\alpha-v) - tg\varepsilon tg\alpha[1+tg(\alpha+\varepsilon)tg\varepsilon] \}$$
$$+ A\cos\varepsilon \{ tg\varepsilon tg(\alpha+\varepsilon)tg(\alpha-v)tg(v+\varepsilon) \}$$
$$- B\cos\varepsilon \{ [1-tg(\alpha-v)tg(v+\varepsilon)]tg\alpha[1+tg(\alpha+\varepsilon)tg\varepsilon] \}$$

oder

$$F = \cos\varepsilon[1+tg(\alpha+\varepsilon)tg\varepsilon] \left\{ \begin{array}{l} A[tg(v+\varepsilon)tg(\alpha-v)] - Atg\varepsilon tg\alpha \\ -B[1-tg(v+\varepsilon)tg(\alpha-v)]tg\alpha \end{array} \right\}$$

oder endlich

$$(d)\ F = \cos\varepsilon\{1+tg(\alpha+\varepsilon)tg\varepsilon\} \left\{ \begin{array}{l} [A+Btg\alpha][tg(v+\varepsilon)tg(\alpha-v)] \\ \quad -tg\alpha[Atg\varepsilon+B] \end{array} \right\}$$

Man sieht aus dieser letzten Gleichung, daß aus

$$\frac{dF}{dv} = o \text{ folgt } \frac{d.tg(v+\varepsilon)tg(\alpha-v)}{dv} = o$$

woraus

$$\frac{tg(\alpha-v)}{\cos^2(v+\varepsilon)} - \frac{tg(v+\varepsilon)}{\cos^2(\alpha-v)} = o$$

also

$$\sin(\alpha-v)\cos(\alpha-v) = \sin(v+\varepsilon)\cos(v+\varepsilon)$$

oder auch

$$\sin 2(\alpha-v) = \sin 2(v+\varepsilon)$$

endlich

$$(M)\ v = \frac{(\alpha-\varepsilon)}{2};$$

dies Resultat ist dasselbe, welches Français gefunden hat, und das auch aus der Ponceletschen Formel §. 123 folgt, wenn man darin die Ueberhöhung oder $h^1 = o$ setzt; dieselbe wird dann

$$tgv = -\frac{1}{tg(\alpha-\varepsilon)} + \frac{1}{z\cos\alpha}\sqrt{\frac{\cos^2\alpha z^2}{\sin^2(\alpha-\varepsilon)}}$$

$$= -\frac{1}{tg(\alpha-\varepsilon)} + \frac{1}{\sin(\alpha-\varepsilon)} = \frac{1-\cos(\alpha-\varepsilon)}{\sin(\alpha-\varepsilon)} = tg\tfrac{1}{2}(\alpha-\varepsilon).$$

Es ist oben die ganze Rechnung mitgetheilt und zwar ohne die Vereinfachung von Persy, da Français und Martony (in der

Uebersetzung der Françaisschen Abhandlung) dieselbe nur sehr abgekürzt mittheilen.

Substituiert man den Werth von v aus der Gleichung (M) in die Gleichung (c) und bezeichnet durch P das Maximum von F in Bezug auf diesen Winkel, so hat man

$$(e)\qquad P = A\cos\varepsilon\left(tg\frac{\alpha+\varepsilon}{2} - tg\,\varepsilon\right)^2.$$

$$-2B\cos\varepsilon\,[1 - tg\,\varepsilon\,\mathrm{cotg}\,(\alpha+\varepsilon)]\,tg\frac{\alpha+\varepsilon}{2}$$

Wenn die Linie BR vertikal wäre, also $\varepsilon = o$, so ist

$$(f)\qquad P = A\,tg^2\frac{\alpha}{2} - 2B\,tg\frac{\alpha}{2}$$

Läge sie nach rechts von der Vertikale, so wäre $\varepsilon = -\varepsilon$ und

$$(g)\qquad P = A\cos\varepsilon\left(tg\frac{\alpha-\varepsilon}{2} + tg\,\varepsilon\right)^2$$

$$-2B\cos\varepsilon\,[1 + tg\,\varepsilon\,\mathrm{cotg}\,(\alpha-\varepsilon)]\,tg\frac{\alpha-\varepsilon}{2}$$

Diese Gleichungen gehen in die folgenden über, wenn man für A und B ihre Werthe setzt:

$$(e_1)\qquad P = \int_k^h p\,(h-z)\frac{\varphi(z)}{\varphi(k)}\,dz\cos\varepsilon\left(tg\frac{\alpha+\varepsilon}{2} - tg\,\varepsilon\right)^2$$

$$-2\int_k^h c.\frac{\psi(z)}{\psi(k)}\,dz\cos\varepsilon\,[1 - tg\,\varepsilon\,\mathrm{cotg}\,(\alpha+\varepsilon)]\,tg\frac{\alpha+\varepsilon}{2}$$

$$(f_1)\qquad P = \int_k^h p\,(h-z)\frac{\varphi(z)}{\varphi(k)}\,dz.\,tg^2\frac{\alpha}{2} - 2\int_k^h c\frac{\psi(z)}{\psi(k)}\,dz\,tg\frac{\alpha}{2}$$

$$(g_1)\qquad P = \int_k^h p\,(h-z)\frac{\varphi(z)}{\varphi(k)}\,dz\cos\varepsilon\left(tg\frac{\alpha-\varepsilon}{2} + tg\,\varepsilon\right)^2$$

$$-2\int_k^h c\frac{\psi(z)}{\psi(k)}\,dz\cos\varepsilon\,[1 + tg\,\varepsilon\,\mathrm{cotg}\,(\alpha-\varepsilon)]\,tg\frac{\alpha-\varepsilon}{2}$$

Um jetzt das absolute Maximum des Druckes zu haben, muß man das Maximum von P suchen, indem man in den vorigen Ausdrücken h als veränderlich ansieht, was nur geschehen kann, wenn

die Formen der Funktionen φ und ψ aus der Erfahrung bestimmt sind, so wie die durch den Winkel α dargestellte Funktion.

Nimmt man z. B. mit Coulomb an, daß das Verhältnis der Reibung zum Druck konstant ist für die ganze Ausfüllung, und daß die Dichtigkeit der Erde und ihre Kohäsion gleichförmig sind, so hat man $\varphi(z)=1, \psi(z)=1$, und wenn man $k=o$ setzt, so wird

$$A=\frac{ph^2}{2}\,;\ B=ch$$

was die Gleichungen (e_1) (f_1) (g_1) in folgende ändert

$$(e_2)\ P=\frac{ph^2}{2}\cos\varepsilon\left(tg\frac{\alpha+\varepsilon}{2}-tg\varepsilon\right)^2-2ch\cos\varepsilon[1-tg\varepsilon\cot g(\alpha+\varepsilon)]tg\frac{\alpha+\varepsilon}{2}$$

$$(f_2)\qquad P=\frac{ph^2}{2}tg^2\frac{\alpha}{2}-2ch\,tg\frac{\alpha}{2}$$

$$(g_2)\ P=\frac{ph^2}{2}\cos\varepsilon\left(tg\frac{\alpha-\varepsilon}{2}+tg\varepsilon\right)^2-2ch\cos\varepsilon[1+tg\varepsilon\cot g(\alpha-\varepsilon)]tg\frac{\alpha-\varepsilon}{2},$$

die mit den Français'schen zusammenfallen.

Prony hat zuerst bemerkt, daß in dieser Annahme der Winkel α der der natürlichen Böschung der Erde mit der Vertikale ist, und man sieht leicht, daß der Werth von P kein Maximum in Bezug auf die Höhe h hat, aber daß er immer mit dieser Höhe wächst, so daß immer die Erde am Fußpunkte bei diesen Annahmen brechen muß. Dasselbe würde noch der Fall sein, wenn man die Dichtigkeit und Reibung konstant, und die Kohäsion proportional der Tiefe der Erdmoleküle unter der Ebene LK annähme: der Druck würde unbestimmt mit der Höhe wachsen, und die Erde würde folglich am Fuße brechen.

Setzte man aber unter der Annahme einer gleichförmigen Dichtigkeit und Reibung

$$\psi(z)=z^2, k=1,$$

so entspricht dies einer Kohäsion, die mit dem Quadrate der Entfernung der Erdmoleküle von einer horizontalen Ebene wächst, die um die Einheit über der Oberfläche des Terrains erhaben ist, und es wird die Gleichung (f_1), welche sich auf vertikale Mauern bezieht, nach gehöriger Reduktion

(1) $P=\frac{h-1}{6}.tg\frac{\alpha}{2}\left\{\left(3ptg\frac{\alpha}{2}-4c\right)h-4ch^2-\left(3p.tg\frac{\alpha}{2}+4c\right)\right\}.$

Die Untersuchung über die Veränderungen des Erddruckes, die aus dieser Gleichung folgen, mit Berücksichtigung der Veränderungen der Tiefe h, giebt zu einer sehr komplizierten Diskussion Veranlaßung, deren Resultat folgendes ist.

Setzt man $\frac{dP}{dh}=o$, so folgt zuerst

(2) $h=\frac{1}{4c}\left\{ptg\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{ptg\frac{\alpha}{2}\left(ptg\frac{\alpha}{2}-8c\right)}\right\}$

ferner ist:

(3) $\frac{d^2P}{dh^2}=\mp tg\frac{\alpha}{2}\sqrt{ptg\frac{\alpha}{2}\left(ptg\frac{\alpha}{2}-8c\right)}$

und endlich folgt aus $P=o$

(4) $h=\frac{1}{8c}\left\{(3ptg\frac{\alpha}{2}-4c)\pm\sqrt{9p^2tg^2\frac{\alpha}{2}-72.pctg\frac{\alpha}{2}-48.c^2}\right\}$

Die Gleichungen (4) und (1) zeigen, daß der Druck nicht o oder positiv werden könne, so lange $c \overset{=}{<} o,116.p.tg\frac{\alpha}{2}$; für größere Werthe von c würde der Druck negativ, die Erde ginge in die Höhe.

Ist $c=o,116.ptg\frac{\alpha}{2}$, so wird der Druck erst negativ, dann null in der Tiefe $2^m,73$ circa, dann würde er wieder negativ für alle größern Höhen, ohne daß er jemals positiv gewesen wäre; in diesem Falle würde also nie ein Druck stattfinden.

Ist $e<0,116.p.tg\frac{\alpha}{2}$, so ist der Druck an der Erdoberfläche oder für $h=1$ null, wird dann negativ und das Maximum der Stabilität des Dreieckes auf der Basis geht durch den Fußpunkt der Erde und findet in der Tiefe der Erdausfüllung $(h-1)$ Statt, die sich aus der Gleichung (2) ergiebt, wenn man darin das untere Zeichen nimmt.

Die Stabilität wird dann kleiner, bis sie mit dem Drucke null wird, der in der Tiefe $(h-1)$ stattfindet, die aus der Gleichung (4) sich findet, wenn man darin das untere Zeichen nimmt.

Unterhalb dieser Tiefe wird der Druck positiv und erhält sein Maximum für die Tiefe ($h-1$), die aus der Gleichung (2) mit oberem Zeichen zu nehmen ist; dann nimmt er ab und verschwindet für die Tiefe ($h-1$), genommen aus der Gleichung (4) mit oberem Zeichen, er wird und bleibt darauf negativ.

Man sieht daher, daß für größere Tiefen, als die, wo der Druck ein Maximum ist, die Erde nicht durch den Fußpunkt der Füllung bricht; dieser Umstand kann übrigens bei vielen anderen Gesetzen der Kohäsion eintreten, so daß man nicht erstaunt sein darf, daß dieser Fall öfter beim Bruche vorkommt.

§. 4. Da das Gesetz der Kohäsion durchaus noch nicht durch Versuche dargethan ist, so wollen wir jetzt bei der Annahme

$$\varphi(z)=1,\ \psi(z)=1$$

stehen bleiben und zuerst die Größe c und darauf die Mauerstärken selbst nach Français bestimmen.

Jede kohärierende Erde hat die Eigenschaft, sich auf eine bestimmte Höhe h_1 vertikal abstechen zu laßen, ohne daß sie einstürzt. Für diese Höhe findet offenbar kein Druck auf die Mauer Statt. Setzt man daher in der Gleichung

$$(f_2) \qquad P=\tfrac{1}{2}ph^2tg^2\tfrac{1}{2}\alpha-2chtg\tfrac{1}{2}\alpha$$

$h=h_1$, so wird sie

$$o=\tfrac{1}{2}ph_1{}^2tg^2\tfrac{1}{2}\alpha-2ch_1tg\tfrac{1}{2}\alpha$$

oder

$$h_1=\frac{4c}{ptg\frac{1}{2}\alpha}$$

und

$$(h) \qquad c=\tfrac{1}{4}ph_1tg\tfrac{1}{2}\alpha$$

worin p das spezifische Gewicht der Erde und α den Winkel der natürlichen Böschung mit der Vertikale bezeichnet.

Ebenso läßt sich die kohärierende Erde unter einem steileren Winkel abstechen, als die natürliche Böschung derselben beträgt. Giebt man der inneren Mauerwand dieselbe Neigung, so wird dieselbe auch dann offenbar keinen Druck erleiden. Es wird sich daher,

wenn man in den Gleichungen (e_2) und (g_2) $P=o$ setzt, diese steilste Neigung gegen die Vertikale $=\varepsilon$, ergeben, in der sich die Erde noch bei der Höhe h erhält, nnd umgekehrt erhält man aus den Gleichungen (e_2) und (g_2) bei gegebener steilster Böschung ε diejenige Höhe, bis zu welcher sich die Erde noch unter dieser Böschung erhalten kann, ohne einzustürzen. Nennt man diese Höhe h_2, so wird

$$(i) \qquad h_2 = \frac{4c\,tg\frac{1}{2}(\alpha \mp \varepsilon)[1 \pm tg\,\varepsilon \cot g(\alpha \mp \varepsilon)]}{p[tg\frac{1}{2}(\alpha \mp \varepsilon) + tg\,\varepsilon]^2}$$

oder wenn man hiervon den Werth von c aus der Gleichung (h) substituiert

$$h_2 = \frac{h_1\,tg\frac{1}{2}\alpha . tg\frac{1}{2}(\alpha \mp \varepsilon)[1 \pm tg\,\varepsilon \cot g(\alpha \mp \varepsilon)]}{[tg\frac{1}{2}(\alpha \mp \varepsilon) \pm tg\,\varepsilon]^2}$$

und wenn man reduziert:

$$h_2 = h_1 . \frac{\cos\varepsilon . \sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\sin^2\frac{1}{2}(\alpha \pm \varepsilon)}$$

oder, da der Böschungswinkel der Erde stets kleiner als 90° ist

$$(k) \qquad h_2 = h_1 . \frac{\cos\varepsilon . \sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\sin^2\frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}.$$

Hierin bedeutet α den Winkel der natürlichen Böschung und ε den der steilsten Böschung der Erde bei der Höhe h_2 mit der Vertikale, und h_1 die Höhe, auf welche sich die Erde vertikal abstechen läßt.

Ist h_1 gegeben, so läßt sich aus dieser Gleichung sowohl 1) die Höhe h_2 finden, bis zu der sich die Erde unter dem Winkel ε aufwerfen läßt, als auch 2) dieser Winkel ε, unter dem sich die Erde bei einer gegebenen Höhe h_2 erhalten kann.

Der Wichtigkeit der Formel wegen, die bei Erdaushebungen von großem Nutzem ist, hat Français eine Tabelle berechnet, die wir hier gleichfalls mittheilen wollen. Die Einrichtung und der Gebrauch der Tabelle ist folgende:

Die Zahl, welche in der horizontalen Kolumne steht, die den Kopf der Tabelle bildet, giebt die Anlage der natürlichen Böschung auf die Einheit der Höhe an, und jene Zahlen, welche in

der ersten vertikalen Kolumne stehen, geben eben so die Anlagen der Böschungen bei der Höhe = 1 für die Aushebung an. Die Zahl, welche in einem durch diese beiden Böschungsanlagen bestimmten Felde geschrieben steht, giebt den entsprechenden Werth von $\frac{h_2}{h_1}$, welcher daher mit dem Werthe von h_1 multiplizirt werden muß, um die Auflösung der ersten Frage zu erhalten.

Bei der zweiten Frage ist h_2 gegeben, die Böschungsanlage für die Aushebung aber ist unbekannt; es muß daher h_2 durch h_1 dividirt, und dann in der Kolumne, welche die Zahl für die natürliche Böschungsanlage enthält, jene gesucht werden, welche mit der gegebenen Anlage der natürlichen Böschung am nächsten überein kommt; der zuerst erhaltene Quotient in der entsprechenden vertikalen Kolumne aufgesucht, wird dann in der ersten vertikalen Kolumne den Werth für die zu gebende Böschungsanlage der Aushebung bestimmen.

Tafel zur Berechnung der Höhen und der Böschungsanlagen für Erdaushebungen.

	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
0,20	2,95	2,40	2,11	1,92	1,80	1,71	1,64	1,59	1,55	1,52	1,49	1,47
0,25	4,30	3,19	2,65	2,34	2,14	1,99	1,89	1,82	1,75	1,70	1,66	1,63
0,30	6,84	4,43	3,42	2,89	2,57	2,35	2,19	2,08	1,99	1,91	1,86	1,81
0,35	12,37	6,50	4,57	3,65	3,13	2,79	2,56	2,39	2,27	2,17	2,08	2,02
0,40	28,38	10,37	6,36	4,72	3,88	3,36	3,02	2,78	2,60	2,46	2,35	2,26
0,45	115,59	18,83	9,37	6,33	4,91	4,11	3,60	3,24	3,00	2,81	2,66	2,54
0,50	∞	43,30	14,98	8,83	6,38	5,11	4,34	3,84	3,48	3,22	3,02	2,87
0,55		176,92	27,25	13,03	8,59	6,47	5,31	4,58	4,08	3,72	3,45	3,24
0,60		∞	62,77	20,86	11,93	8,41	6,63	5,53	4,83	4,33	3,97	3,69
0,65			257,34	37,92	18,05	11,28	8,40	6,77	5,76	5,08	4,58	4,22
0,70			∞	87,57	28,26	15,77	10,90	8,42	6,96	6,00	5,33	4,84
0,75				356,96	51,54	23,26	14,63	10,69	8,52	7,16	6,25	5,60
0,80				∞	119,08	37,41	20,47	13,92	10,61	8,65	7,39	6,51
0,85					488,06	68,21	30,26	18,67	13,46	10,59	8,82	7,63
0,90					∞	157,39	48,55	26,65	17,51	13,18	10,65	9,01
0,95						645,69	86,59	38,61	23,50	16,73	13,03	10,79
1,00						∞	204,69	61,95	32,86	21,77	16,21	12,98
1,05							840,78	68,11	48,60	29,21	20,57	15,88
1,10							∞	260,64	79,01	40,81	26,73	19,74
1,15								1072,65	142,23	60,35	35,87	25,04
1,20								∞	328,14	96,93	50,09	32,53

§. 5. Setzt man in die Gleichungen (e_2) und (g_2) den Werth für c aus der Gleichung (i) und

$$t = tg\tfrac{1}{2}(\alpha \pm \varepsilon) \pm tg\varepsilon$$

so werden dieselben:

$$(l) \qquad P = \tfrac{1}{2}pt^2 . h(h-h_2)\cos\varepsilon$$

worin t das Verhältnis der Grundlinie des Prisma vom größten Drucke zu dessen Höhe ausdrückt.

Français benutzt die Gleichung (l) zur Bestimmung des Momentes vom Erddrucke. Dasselbe wird dann:

$$(m) \quad M = \tfrac{1}{2}pt^2 \left\{ \tfrac{1}{3}(h-h_2)^2(h+\tfrac{1}{2}h_2) \mp h(h-h_2)x\sin\varepsilon\cos\varepsilon \right\};$$

ferner der Hebelarm:

$$= \frac{M}{P} = \frac{(h-h_2)(h+\frac{1}{2}h_2)}{3h\cos\varepsilon} \pm x\sin\varepsilon$$

und die Entfernung des Angriffspunktes desselben von der innern Kante des Fußes der Mauer

$$= \frac{(h-h_2)(h+\frac{1}{2}h_2)}{3h\cos\varepsilon} = \frac{\frac{1}{3}h}{\cos\varepsilon} - \frac{\frac{1}{6}h_2}{h}\,\frac{(h+h_2)}{\cos\varepsilon};$$

der Angriffspunkt liegt daher etwas unter $\frac{1}{3}$ der Mauerhöhe und würde ohne Kohäsion, wie bei dem Druck der Flüßigkeiten liegen.

Da ferner unter Beibehaltung der Ponceletschen Bezeichnung §. 1. pag. 7 das Moment der Mauer

$$(m_1) \quad M_1 = p_1 H \left\{ \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{6}n^2H^2 \mp \tfrac{1}{2}Htg\varepsilon(e \mp \tfrac{1}{3}Htg\varepsilon) \right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}p_1 H \left\{ e^2 \mp eHtg\varepsilon + \tfrac{1}{3}H^2(tg^2\varepsilon - n^2) \right\}$$

für den Fall des Umsturzes ist, so wird aus $(m) = (m_1)$, da in ihnen H für h zu setzen ist *).

$$(n) \quad e = H \Big\} \pm \tfrac{1}{2}tg\left(1 - \frac{pt^2}{p_1}.\frac{H(H-h_2)}{H^2}\cos^2.\varepsilon\right)$$
$$+ \sqrt{\left[\tfrac{1}{3}.\frac{pt^2}{p_1}\,\frac{(H-h_2)^2(H+\frac{1}{2}h_2)}{H^3} + \right.}$$
$$+ \tfrac{1}{4}tg^2\varepsilon\left(1 - \frac{pt^2H}{p_1}.\frac{(H-h_2)}{H^2}.\cos^2\varepsilon\right)^2$$
$$\left. - \tfrac{1}{3}(tg^2\varepsilon - n^2)\right]\Big\}.$$

*) Français setzt H nicht gleich h, da er seine Formel auch auf Ueberhöhungen anwendbar hält.

Für Mauern, deren innere Wand vertikal steht, ist $\varepsilon = o$, $h_2 = h_1$, $t = tg\frac{1}{2}\alpha$

$$(o)\quad e = H\sqrt{\left\{\tfrac{1}{3}\cdot\frac{p\,tg^2\frac{1}{2}\alpha}{p_1}\cdot\frac{(H-h_1)^2(H+\frac{1}{2}h_1)}{H^3}+\tfrac{1}{3}n^2\right\}}.$$

Setzt man die Kohäsion $=o$, so ist $h_1 = h_2 = 0$, und die Formeln (n) und (o) werden:

$$(n_1)\quad e = H\left\{\pm\tfrac{1}{2}tg\,\varepsilon\left(1-\frac{pt}{p_1}.\cos^2\varepsilon\right)\right.$$
$$+\sqrt{\left[\tfrac{1}{3}\cdot\frac{pt^2}{p_1}+\tfrac{1}{4}tg^2\varepsilon\left(1-\frac{pt^2}{p_1}.\cos^2\varepsilon\right)^2\right.}$$
$$\left.\left.-\tfrac{1}{3}(tg^2\varepsilon-n^2)\right]\right\}.$$

$$(o_1)\quad e = H\sqrt{\left\{\tfrac{1}{3}\cdot\frac{p.tg^2\,1/_2\,\alpha}{p_1}+\tfrac{1}{3}n^2\right\}}.$$

Die letzte Formel ist genau die Ponceletsche Formel (i) §. 8, wenn man in letzterer $\delta = 1$ und in dem Werthe für M aus §. 6 $h = o$ setzt.

Für den Fall des Gleitens wird, wenn c_1 die Kohäsion des Mauerwerkes bedeutet:

$$\tfrac{1}{2}pt^2H(H-h_2)\cos^2.\varepsilon = f_1\left\{p_1He-\tfrac{1}{2}p_1H^2(n\pm tg\varepsilon)\right.$$
$$\left.\pm\tfrac{1}{2}pt^2H(H-h_2)\sin\varepsilon\cos\varepsilon\right\}+c_1e$$

und somit:

$$(p)\quad e = \tfrac{1}{2}\left(\frac{pt^2H(H-h_2)\cos^2\varepsilon(1\mp f_1tg\varepsilon)}{p_1f_1H+c_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{p_1f_1H^2(n\pm tg\varepsilon)}{p_1f_1H+c_1}\right),$$

Nimmt man auf Kohäsion keine Rücksicht, so ist $h_2 = o$, $c_1 = o$ und

$$(p_1)\quad e = H\left\{\pm\tfrac{1}{2}tg\,\varepsilon\left(1-\frac{pt^2}{p_1}.\cos^2\varepsilon\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{pt^2}{p_1f}.\cos^2\varepsilon+n\right)\right\}.$$

Für Mauern, deren innere Wand vertikal steht, ist $\varepsilon = o$, $t = tg\,\alpha\,\frac{1}{2}$ und

$$(q) \qquad e = \tfrac{1}{2} H \left(\frac{p \cdot tg^2 \tfrac{1}{2}\alpha}{p_1 f_1} + n \right),$$

welches wieder genau mit der Ponceletschen Formel (h) §. 8 übereinstimmt, wenn man in derselben $\delta_1 = 1$ und in dem zugehörigen Werthe von P aus §. 6 $h = o$ setzt.

§. 6. Français untersucht noch, welches das beste Mauerprofil ist. Für dasselbe muß, wenn y die obere Mauerdicke und S die Fläche des Mauerquerschnitts ist, der Werth von S

$$S = \tfrac{1}{2} H (e + y)$$

oder da

$$y = e - H (n \pm tg \varepsilon)$$

ist, der Werth von

$$S = He - \tfrac{1}{2} H^2 (n \pm tg \varepsilon)$$

ein Minimum sein. Eine weitläufige numerische Diskussion zeigt, daß von allen Profilen dasjenige das beste sei, für welches die beiden Seitenwände gegen die Erdfüllung geneigt sind, und von diesen wieder dasjenige, das bei der größten äußeren Böschung auf der ganzen Höhe eine innere Böschung hat, deren Anlage ungefähr $\frac{1}{6}$ der Höhe beträgt; denn nur dieses wird entweder bei gleichem Volumen die größte Stabilität, oder bei gleicher Stabilität das kleinste Volumen erfordern.

§. 7. In dem vorigen haben wir so ziemlich alles brauchbare wiedergegeben, was von den Franzosen über die Theorie des Erddruckes geleistet ist, und es ist Zeit, daß wir uns nun zu dem wenden, was in Deutschland für denselben Gegenstand gethan ist. Vorher möge nur noch kurz die Bestimmung der Stärke der Strebepfeiler stattfinden, da diese im bisherigen sich nicht findet, und dieselbe wohl zuweilen gesucht wird. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, wo sich die Strebepfeiler auf der Seite der Füllerde befinden, und nehmen wir dieselben als mit der Mauer fest verbunden an, wenn gleich sich diese Annahme nicht hinlänglich genau in der Praxis ausführen läßt. Es sind mehre Fälle vorgekommen, wo die Mauer umstürzte und die Strebepfeiler in der Füllerde stecken blieben. Um daher sicher zu gehen, muß man die im folgenden durch e_1 bezeichnete Mauerstärke jedenfalls stärker nehmen, als das

genaue Gleichgewicht dieselbe erfordert; hier sind die Poncelet schen Formeln vorzuziehen, da in denselben eine Verstärkung durch den Stabilitätskoeffizienten eingeführt ist.

Ist die Dicke der Mauer am Fuße $=e$, die äußere Ausladung auf die Höhe $H_1=m$, die innere $=n$ und die innere Ausladung des Strebepfeilers auf dieselbe Höhe $=r$, ist ferner die Dicke des Strebepfeilers am Fuße $=d$, die Breite desselben auf die ganze Höhe $=b$, die Höhe des Strebepfeilers $=$ der der Mauer $=H$, die Entfernung zweier Strebepfeiler von Mitte zu Mitte $=s$, endlich das Gewicht des Mauerwerkes $=p$, so ist das Moment eines Strebepfeilers:

$$(1) \qquad M_1=\tfrac{1}{2}bHp_1 \left\{ d(d+2e\pm mH)+\frac{H^2}{3}(n^2-r^2) \right\},$$

das Moment der Mauer auf die Länge s ist:

$$(2) \qquad M_2=\tfrac{1}{2}sHp_1 \left\{ e(e\pm mH)+\frac{H^2}{s}(m^2-n^2) \right\},$$

folglich das Moment der Mauer mit Strebepfeilern auf dieselbe Länge s:

$$(3) \qquad M=\tfrac{1}{2}Hp_1\Big[bd(d+2e\pm mH)+\frac{bH^2}{3}(n^2-r^2)$$
$$+es(e\pm mH)+\frac{sH^2}{3}(m^2-n^2)\Big].$$

Ist nun M^1 das Moment des Erddruckes auf dieselbe Länge s, so muß

$$M^1=M$$

oder wenn P die Größe des Erddruckes und l sein Hebelarm ist

$$P.l=M$$

sein. Bei der Anwendung muß nun zuerst die Mauerdicke e so bestimmt werden, daß die Mauer gegen das Gleiten gesichert ist. Hierzu dienen die Formeln (h) pag. 13 und (p), (p_1) oder (q) §. 5 des Anhanges. Ist diese bestimmt, $=e_1$, so müßen ferner noch zwei von den Größen b, d, s bestimmt werden. Gewöhnlich kennt man b und s und sucht d; dies wird dann:

$$d = -\frac{2e_1 \pm mH}{2} +$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{2e_1 \pm mH}{2}\right)^2 + \frac{2M^1}{bp_1H} + \tfrac{1}{3}H^2 \left\{ (r^2 - m^2 + \frac{s}{b}(n^2 - m^2) \right\} \right.}$$

$$\left. + \frac{e_1 s}{b}(e_1 \pm mH) \right].$$

Das obere Zeichen gilt, wenn die innere Mauerwand mit der Basis der Erdfüllung einen spitzen; das untere, wenn sie damit einen stumpfen Winkel bildet. Wird dieser Winkel, wie früher, durch $90^0 \pm \varepsilon$ bezeichnet, so ist statt m die Größe $tg\varepsilon$ zu setzen, und es ist:

$$d = -\frac{2e_1 \pm Htg\varepsilon}{2} +$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{2e_1 \pm Htg\varepsilon}{2}\right)^2 + \frac{2M^1}{bp_1H} + \tfrac{1}{3}H^2 \left\{ r^2 - tg^2\varepsilon + \frac{s}{b}(n^2 - tg\varepsilon^2) \right\} \right.}$$

$$\left. + \frac{e_1 s}{b}(e_1 \pm Htg\varepsilon) \right].$$

§. 8. Bei der Aufzählung dessen, was von den Deutschen für die Theorie des Erddruckes geschehen ist, können wir uns füglich begnügen, nur auf dasjenige Rücksicht zu nehmen, wobei das Coulombsche Prinzip vom Maximum des Erddruckes in Anwendung gebracht ist. Dies findet sich zuerst in der Abhandlung von Woltmann*) über den Druck der Erde gegen Futtermauern. Die Formel, die er für den Druck findet, ist (pag. 175):

$$= \tfrac{1}{2}ph^2\left(\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}\right).$$

Ohne hier näher auf diese Formel einzugehen, wollen wir sogleich zu den Versuchen übergehen, die von Woltmann über den Druck der Erde angestellt sind und dieselben mit der Coulombschen Theorie sowohl, als auch mit derjenigen vergleichen, die Herr Geheime Oberbaurath Hagen gegeben hat, und von der später (§. 11) die Rede sein wird. Die Versuche sind mit einem Kasten

*) Beiträge zur hydraulischen Architektur Bd. III. pag. 149.

von 4 Fuß Höhe, 4 Fuß Breite und 2 Fuß Länge gemacht. Der Kasten wurde einmal ganz, das andere Mal zur Hälfte gefüllt; das Charnier befand sich dabei das eine Mal unten, das andere Mal oben. — Die ersten vier Versuche sind mit ganz trockenem Flugsande gemacht; allein der Reibungswinkel ist gar nicht angegeben. Der fünfte bis achte Versuch geschah mit Ackererde, deren Reibungswinkel Woltmann zu ungefähr 45° annimmt. Bei dem neunten Versuche mit Kieseln, bei dem zehnten und elften mit Rappsaat, bei dem zwölften und dreizehnten mit Rocken ist gar kein Reibungswinkel angegeben. Pag. 167 finden sich zwar die Reibungswinkel angegeben, aber, wie es scheiut, nur ungefähr. Die Versuche selbst sind folgende:

№ der Versuche	Füllerde	Reibungswinkel	Gewicht eines Kubikfußes	Beobachteter Druck	Berechnet nach Coulomb	Druck nach Hagen
1	trockener Flugsand	58°	73½ ℔	131,3	240,9	154,2
2	dito	dito	dito	16,2	30,1	19,3
3	dito	dito	dito	230,1	481,8	308,4
4	dito	dito	dito	76,5	150,6	96,5
5	Ackererde	45°	62 ℔	79.5	113,5	70,0
6	dito	dito	dito	8,7	14,2	8,7
7	dito	dito	dito	130,8	227,0	140,0
8	dito	dito	dito	39,5	71,0	43,5
9 {	Kiesel	54°	79	132	437,6	276,4
	dito	dito	dito	54	136,5	86,0
10	Rappsaat	65°	34,25	151,6	211,0	195,6
11	dito	dito	dito	80,5	105,5	97,8
12	Rocken	dito	35,5	68,4	109.3	101,3
13	dito	dito	dito	121,6	218,6	202,6

Herr Geheime Oberbaurath Hagen bringt die Resultate seiner Theorie den beobachteten Resultaten dadurch noch näher, daß er die Reibung an den Seitenwänden des Kastens berücksichtigt; der Einfachheit wegen ist dies vorhin nicht geschehen. Ohne hier noch weiter bei den Versuchen zu verweilen, wollen wir lieber eine Tabelle mittheilen, die Woltmann pag. 197 für Hamburger Maaß und Gewicht giebt.

Tafel
über die Gewichte und die spezifische Schwere verschiedener Füllmaterialien.

№	Füllmaterialien Benennung	Größe einzelner Stücke	Gewicht eines Kubikfußes trocken und porös ℔	Gewicht eines Kubikfußes mit Waßer gesättigt ℔	Leerer Raum den das Waßer einnimmt	Gewicht eines massiven Kubikfußes ℔	Spezifische Schwere, die des Waßers = 1
1	Feldsteine . .	à Stück circa 6 ℔ schwer	78,25	96,50	0,376	125,40	2,586
2	desgl. . . .	» » » 2 » »	78,25	96,50	0,376	125,40	2,586
3	Kiesel	» » » ½ » »	76,22	96,45	0,417	130,74	2,696
4	desgl. . .	» » » 3 Loth »	77,40	96,45	0,393	127,51	2,629
5	Steingrand	» » » $^3/_{100}$ » »	78,34	97,86	0,402	131,00	2,701
6	Moelons . .	» » » 10 » »	63,05	88,45	0,524	133,46	2,731
7	Stücke von zerbrochenen Mauer- und Dachziegeln	» » » ½ ℔ »	45,16	72,22	0,558	102,17	2,107
8	Schutt von alten Mauern		56,46	75,98	0,402	94,41	1,947
9	Muschel (Schelp)		31,05	66,81	0,737	118,06	2,434
10	Flugsand		73,50	93,50	0,412	125,00	2,577
11	Geestsand		74,00	94,33	0,419	127,37	2,626
12	Gartenerde		61,00	83,50	0,462	113,38	2,338
13	Trockne Thonerde		59,14	76,14	0,350	90,98	1,876
14	Fester Thon		91,10	nimmt kein Waßer an	0,000	91,10	1,878
15	Moor		11,00	36,00	0,515	22,68	0,468

§. 9. Nach Woltmann hat zunächst Eytelwein *) die Theorie der Futtermauern behandelt. Da Eytelwein aber ganz der schon früher erwähnten Pronyschen Abhandlung folgt, so leidet seine Theorie auch an denselben Mängeln. Namentlich liegt die Unrichtigkeit derselben darin, daß Prony, und mit ihm auch Eytelwein die Kraft, welche die Mauer dem Erddrucke entgegensetzen muß, horizontal, anstatt rechtwinklig auf die innere Mauerwand zerlegen. Nur in dem Falle, wo diese innere Mauerwand vertikal steht, giebt daher diese Theorie richtige Resultate.

---

*) Praktische Anmerkung zur Wasserbaukunst. 3tes Heft.

§. 10. Das wichtigste was in Deutschland über den Erddruck erschienen ist, sind die Versuche von Martony *). Zuerst giebt Martony eine Uebersetzung von Coulomb's und Français Theorie und geht darauf zu den frühern Versuchen über den Erddruck über, worauf dann seine eigenen Versuche folgen, die an Genauigkeit und Größe alle andern Versuche übertreffen. Martony hat auch zuerst auf die Größe der Kohäsion trockener und feuchter Erde Rücksicht genommen, und dieselbe entweder unmittelbar gemessen oder auch dadurch, daß er die Höhe maaß, bis zu welcher sich die Erde vertikal abstechen ließ, und die steilste Böschung, auf der sich die Erde noch bei gegebener Höhe erhielt. Daraus läßt sich dann nach der Français'schen Theorie (§. 5 dieses Anhanges) die Kohäsion selbst berechnen.

Der von Martony, zur Meßung des Erddruckes gegen eine Wand, angewandte Apparat kommt der Hauptsache nach mit dem von Mayniel benutzten überein.

Ein 4seitiger Kasten, 3 Fuß breit, 6 Fuß hoch uud 9 Fuß lang, dessen eine schmale Seite ein, um ihre untere innere Kante drehbares, Thor bildete, wurde mit der Masse gefüllt, deren Druck bestimmt werden sollte. Das Thor wurde mittelst zweier Seile gehalten, die über eine Welle mit zwei Rädern gingen, an denen die Welle umgedreht und gehalten wurde. Vor dem Thore befand sich eine 3 Fuß tiefe, 5 Fuß breite und 5 Fuß 10 Zoll lange ausgemauerte Vertiefung, in die die abfallende Erde hinabfiel. Auf $\frac{1}{3}$ der Höhe des Thores war eine eiserne, 1 Zoll im Durchmeßer haltende, Stange angebracht, die horizontal nach dem Gewichtskasten ging. Dieser 3 Fuß lange, 3 Fuß breite und 1 Fuß hohe Gewichtskasten ruhte auf einer hölzernen Unterlage, die ihrerseits wieder mit einer gut gegründeten Unterlage von Mauerwerk fest verbunden war. Der Kasten wurde mit Bleigewichten so stark belastet, daß seine Reibung auf der Unterlage den Druck der Erde übertraf, der durch die, an das Thor befestigte, Eisenstange auf diesen Kasten übertragen wurde. — Ueber diesem Kasten befand sich ein kleinerer Kasten so, daß sein Schwerpunkt mit dem des Gewichts-

*) Versuche über den Seitendruck der Erde von Martony de Köszegh. Wi n 1828. — Förster's Bauzeitung. Band II.

kastens in eine Vertikale fiel. Dieser kleinere Kasten wurde mit Schrot gefüllt, das durch eine Oeffnung ausfließen konnte. Auf diese Weise konnte durch kleine Quantitäten die Reibung so lange vermindert werden, bis dieselbe dem Druck der Erde genau das Gleichgewicht hielt. Nachdem der Kasten gefüllt und der ganze Apparat in Ordnung gebracht war, wurden die Seile vom Thore losgemacht und der Schrotkasten geöffnet; letzterer wurde augenblicklich geschloßen, sobald so viel Schrot ausgelaufen war, daß der Gewichtskasten vom Thore vorwärts geschoben wurde. Dann wurde die eiserne Zwischenstange weggenommen, und das Thor langsam durch die wieder eingehängten Seile ganz niedergelaßen, die abgefallene Erde weggeräumt, das Thor wieder aufgerichtet, und die Zwischenstange wieder eingesetzt. Nachdem dann noch die Seile wieder vom Thore losgemacht waren, wurde an den Gewichtskasten mittelst einer Rolle und eines Seiles eine Wagschale angebracht, und diese so lange mit Gewichten beschwert, bis eine, der vorigen gleiche Bewegung des Gewichtskastens erfolgte. Diese Gewichte gaben, nach Abzug der durch Zapfenreibung und Seilbiegung hervorgebrachten Widerstände, verbunden mit dem Gewichte der Wagschale den gesuchten Druck der Erde.

Die natürliche Böschung der Erde wurde gleichzeitig folgendermaßen gefunden. Man warf die Erde mit Schaufeln in den Kasten, so daß sie gestreut und die Anschüttung lagenweise emporsteigend gemacht wurde. War man hiermit bis an den Rand des Kastens gekommen, so wurden noch einige Kubikfuß Erde sachte aufgelegt und mittelst einer gehobelten Latte vorwärts gestrichen. Gleitete diese Erde dann bis zum Fuß herunter, so war die Böschung die natürliche, aus der der Reibungskoeffizient sich ergiebt. Während dieser Operation wurden auch einige Kubikfuß Erde gewogen.

Zu den Versuchen wurden Dammerde, Sand, reiner gelber Lehm und Schotter benutzt. Die drei ersten Erdarten wurden im staubtrockenen, im natürlich feuchten und in einem mit Waßer gesättigten Zustande angewandt. Bei der Dammerde wurden auch Versuche vorgenommen, wenn dieselbe festgestoßen war und auch wenn ihre Anschüttung höher war, als das Hinderniß.

Außerdem wurde die Kohäsion der Erde entweder durch vertikales Abstechen oder durch Erhebung der steilsten Böschung oder

endlich unmittelbar gemeßen. Hierzu bediente man sich eines Kastens, der mit der fraglichen Erde gefüllt wurde, die man dann darin stampfte. War der Kasten auf diese Weise ganz gefüllt, so wurde die oberste Erde etwas aufgelockert, ein Rahmen über den Kasten gesetzt, der etwas kleiner war, als der Kasten, und gleichfalls Erde hineingestampft, so daß die Erde in diesem Rahmen mit der in dem Kasten befindlichen Erde ganz zusammenhing. Mittelst einer Wagschale, die über eine Rolle ging, wurde dann die Kraft gesucht, die diesen Rahmen in Bewegung zu setzen und somit die Erde von einander zu reißen vermochte. Da sowohl die Seiten des Kastens als die des Rahmens abgerundet waren, so brauchte nur noch die Reibung der Erde von dem so gefundenen Gewichte abgezogen zu werden, um die Kohäsion zu erhalten. Diese Reibung ergab sich aber, indem man den Rahmen in die vorige Lage brachte und nun von neuem Gewichte in die Wagschale legte und die Kraft suchte, die den Rahmen jetzt in Bewegung brachte.

Die Versuche selbst sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, so wie die Vergleichung derselben mit der Coulombschen und Hagenschen Theorie. Das Gewicht des Erdprismas ist, aus der angegebenen Grundlinie des abgefallenen Prismas berechnet. Bei ihm kommt keine Kohäsion weiter in Sprache, und kann dasselbe daher sehr gut zur Vergleichung dienen, anf die wir später noch zurückkommen werden. Bei der Größe des Erddruckes ist auch auf die Kohäsion Rücksicht genommen, wenn gleich diese nicht immer genau genug bestimmt ist; ihr Einfluß läßt sich aber doch deutlich daraus absehen.

Der natürliche Böschungs- (Reibungs-) Winkel ist so angegeben, wie er von Martony während des jedesmaligen Versuches gefunden ist; der steilste Böschungswinkel wurde gleich nach vollendetem Versuche gemeßen, darf jedoch nur bei Berechnung der Kohäsion, aber meiner Meinung nach, nicht, wie Herr Geheime Oberbaurath Hagen will, bei Berechnung des Druckprismas und des Druckes benutzt werden, wie z. B. namentlich bei den Versuchen **38** bis **41**.

Zusammenstellung der Martony'schen Versuch

№ des Versuchs	Namen der Erde	Zustand der Erde	Ein Kubikfuß der Erde wiegt: locker ℔	gestampft ℔	ganz naß ℔	Natürliche Böschung der Erde	Die Erde läßt sich vertikal abstechen auf Fuß	Die steilste Böschung der Erde	Kohäsion der Erd[e] auf 1 □ F[uß] ℔
3	Lockere	Staubtrocken	79,6			51°7′			
4	Damm-		79,125			dito			
5	erde		79,125			dito			
6			79,9			51°7′			
7			dito			dito			
8			dito			dito			
9			dito			dito			
10			dito			dito			
11			dito			dito			
12			dito			dito			
13			dito			dito			
14			dito			dito			
15			dito			dito			
16			dito			dito			
		Mittel a. 6-16	79,9	Bei den		51°71			
17			80,5	Versuchen		51°71			
18			dito			dito			
19			dito	17 bis 20		dito			
20			dito			dito			
				und					
		Mittel a. 17-20	80,5	51 bis 57		51°71			
42		trocken	74,674			50°121	0,0	26½° bei 3′ Höh	7 berech[-]
43		etwas feucht	66,18	war die		50°121	0,9	25°	11 net
51		natürlich	71,73	Erdfüllung		48°301			
52		feucht	70,3			dito		15°71	40,8
53			71,1	4 Fuß		dito		auf 10 Fuß	berechnet
54			71,5	höher als		dito		im	
55			71,3			dito		Mittel	
56			72,4	das		dito			
57			71,4	Hindernis		dito			
		Mittel a. 51-57	71,39			48°30′			
23			67			51°	22 Fuß hohe Ausschüttung		
24		mit Waßer	80,5		104,2	51°0′			
44		gesättigt	trocken		108,0	55°30′		55°30′ bei 3 Fuß Höh[e]	
26	Festgestoß.	staubtrocken	79,56	89,92					9,68
50	Dammerde	natürlich feucht	70,75	94,40		47°30′	12,85 (berechn.12,878)		100,0
28	Sand	desgl.	92,859			49°0′			4,8
35		desgl.	94,165			50°			
36		desgl.	94,165			50°	0,45	33°40′	5

und ihre Vergleichung mit der Theorie.

Gewicht des abgefallenen Prismas			Druck gegen die vertikale Wand				
beobachtet ℔	berechnet nach Français	berechnet nach Hagen	beobachtet ℔	ohne Kohäsion Français	ohne Kohäsion Hagen	mit Kohäsion Français	mit Kohäsion Hagen
2905	2055	3034	492,7	978,1	612,5	932	566
2614	2043	3016	631,3	972,1	608,7	926	563
2136	2043	3016	639,9	972,1	608,7	926	563
2257	2063	3027	614,5	981,6	614,7	936	569
1720	dito	dito	601,4	dito	dito	dito	dito
2179	dito	dito	639,7	dito	dito	dito	dito
2157	dito	dito	674,3	dito	dito	dito	dito
2125	dito	dlto	736,3	dito	dito	dito	dito
2445	dito	dito	662,5	dito	dito	dito	dito
3085	dito	dito	858,1	dito	dito	dito	dito
1758	dito	dito	626,7	dito	dito	dito	dito
2538	dito	dito	611,3	dito	dito	dito	dito
2097	dito	dito	788,9	dito	dito	dito	dito
2661	dito	dito	686,5	dito	dito	dito	dito
2275	2063	3027	686,4	981,6	614,7	936	569
3703	3838	6621	1188				
3703	dito	dito	1188				
4427	dito'	dito	1324				
4266	dito	dito	1143				
4025	3838	6621	1211				
3012	3125	5362	832,3				
3270	3064	5257	mislungen				
3146	3097	5315	356,8				
3003	3115	5345	mislungen				
3210	3108	5332	379,5				
3465	3155	5413	377,7				
2678	3112	5338	253,2				
3112	3111	5337	366,8				
89274	88929	135508					
1563			1703,2				
2900	2340	3429	1052	1007	664,4	1041	638
2119	2371	3492	995	1166	690.5	1078	663
2373	dito	dito	1012	dito	dito	dito	dito

№ des Versuchs	Namen der Erde	Zustand der Erde	Ein Kubikfuß der Erde wiegt			Natürliche Böschung der Erde	Die Erde läßt sich vertikal abstechen auf Fuß	Die steilste Böschung der Erde	Kohäsion der Erde auf 1 □ Fu
			locker ℔	gestampft ℔	ganz naß ℔				℔
37	Sand	mit Waßer gesättigt	94,165		110,15	48°9′	0,9	26½° bei 3′	Höhe
38		vollk. trocken	98,6			53°	0,0	39°50′	
39		desgl.	dito			dito	0,0	34°20′	bei 6 Fuß
40		desgl.	dito			dito	0,0	42°30′	Höhe
41		desgl.	dito			dito	0,0	37°0′	
		Mittel a. 38-41	98,6			53°	0,0	38°25′	9,58 berechn
29	Geschlämmter Lehm	vollk. trocken	84,9			50°20		30°30′	21,85
30		locker	84,9			50°20′		26°30′	
		festgestoßen	85	89,6					
31		etwas feucht	77,7			50°10′	0′,9	26°30	93,68
32		desgl.	77,7			50°10′	ber. 1,56	au 6′ Höh	
33		desgl.	77,7			50°10′	Mittel 1,23	26°30′	11,18
		festgestoßen	77,7	107,0					166,6
34		m. Waßer gesätt.	84,9		112	51°20′	3′		
45	Schotter	etwas feucht	95,1			49°15′			
46		desgl.	95,1			dito			
47		desgl.	95,21			dito		41¾° a. 6′	
48		desgl.	95,21			dito		42° Höhe	2,161

etzung

Gewicht des abgefallenen Prismas			Druck gegen die vertikale Wand				
				ohne Kohäsion		mit Kohäsion	
beobachtet ℔	berechnet nach Français	berechnet nach Hagen	beobachtet ℔	Français	Hagen	Français	Hagen
2677			994				
			1369	1323	833,5	1149	660
			1324	dito	dito	dito	dito
			1342	dito	dito	dito	dito
			1143	dito	dito	dito	dito
			1294,5	1323	833,5	1149	660
			659,3	1012	632,7	642	263
			648,5	1012	632,7	642	263
			658,2 ?	926,3	579,0	738	391
			702,8	926,3	579,0	oder	oder
			691,0	926,3	579,0	687	349
			601				
			976,3	1079	672,4	1043	636
			970,9	1079	672,4	1043	636
			1001	1080	673,1	1044	637
			994,4	1080	673,1	1044	637

§. 11. Die Theorie des Erddruckes, welche Herr Geheime Oberbaurath Hagen am früher angezeigten Orte gegeben hat, unterscheidet sich von der Coulombschen Theorie in der Art der Zerlegung der Kräfte. Die von Kästner zuerst vorgeschlagene und von Hagen angewandte Zerlegung ist die folgende:

Ist φ der Winkel des abfallenden Prismas mit der Vertikale, h die Höhe des Prismas, p das Gewicht der Erde und $f = \operatorname{cotg} \alpha$ der Reibungskoeffizient für Erde auf Erde, so zerlegt sich das Gewicht des Prismas

$$\tfrac{1}{2} h^2 \gamma \, tg \, \varphi$$

normal und parallel zur Richtung der Bruchlinien. Die erstere

$$\tfrac{1}{2} h^2 \gamma \, tg \, \varphi \sin \varphi$$

bewirkt die Reibung

$$\tfrac{1}{2} h^2 \gamma \, tg \, \varphi . \sin \varphi . \operatorname{cotg} \alpha,$$

und es wird somit die Kraft, mit der das Prisma auf der Bruchlinie herabzusinken strebt

$$\tfrac{1}{2} h^2 \gamma \, tg \, \varphi (\cos \varphi - \sin \varphi . \operatorname{cotg} \alpha).$$

Die horizontale Seitenkraft hiervon giebt den Druck auf eine vertikale Stützwand

$$F = \tfrac{1}{2} h^2 \gamma \, tg \, \varphi \sin \varphi (\cos \varphi - \sin \varphi . \operatorname{cotg} \alpha)$$

der ein Maximum werden soll; d. es muß:

$$\frac{dF}{d\varphi} = o.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich

$$tg^3 \varphi + 3 tg \, \varphi - 2 tg \, a = o$$

und

$$(1) \qquad tg \, \varphi = \sqrt[3]{sec \, \alpha + tg \, \alpha} - \sqrt[3]{sec \, \alpha - tg \, \alpha}$$

und

$$(2) \qquad F = \tfrac{1}{2} h^2 \gamma \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} . tg \, \varphi . \sin(\alpha - \varphi)$$

während einfach nach Coulomb

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\alpha$$

und

$$F = \tfrac{1}{2}h^2\gamma tg^2 \tfrac{1}{2}\alpha$$

war.

§. 12. Hagen leitet noch eine Formel für den Fall ab, wenn die Erdmasse nicht unbegrenzt, sondern in einem Kasten aufgeschüttet ist, bei dem die Reibung der Erde mit den Seitenwänden nicht vernachläßigt werden darf. Diese Formel ist:

$$(H)\,K = \frac{\left\{\tfrac{1}{2}a^2 b\gamma \dfrac{1}{\sin\alpha}\sin(\alpha-\psi) - \tfrac{1}{3}.\dfrac{1}{\nu}.\dfrac{\sin\varphi}{\sin\alpha}.tg\varphi\sin(\alpha-\varphi)\gamma.a^3\right\}}{tg\psi.\sin\psi}$$

wenn ψ den Winkel bezeichnet, unter dem die Trennungsebene in einem Kasten gegen die Vertikale geneigt ist. Derselbe wird am einfachsten durch einige Substitutionen für ψ erhalten, aus denen man dann leicht den richtigen Werth von ψ, welcher dem Maximum entspricht, findet. Die direkte Auflösung führt auf eine Gleichung des 6ten Grades in φ.

Ferner ist a die Höhe des Kastens, b dessen Breite und $\frac{1}{\nu}$ der Reibungskoeffizient zwischen Erde und Sand. — Die vorige Formel findet Hagen, indem er das durch den Winkel ψ getrennte Prisma in vertikale Differentialschichten getheilt denkt. Der dann von dem Prisma ausgeübte Druck wird =

$$\tfrac{1}{6}\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}tg\varphi.\sin(\alpha-\varphi)\gamma a^3 tg\psi$$

und somit die gegen beide Seitenwände ausgeübte Reibung

$$K = \tfrac{1}{3}.\frac{1}{\nu}.\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}tg\varphi.\sin(\alpha-\varphi)\gamma a^3 tg\psi,$$

also der schräge Druck, mit dem das Prisma herabzugleiten strebt

$$= \tfrac{1}{2}a^2 b\gamma\frac{tg\psi}{\sin\alpha}\sin(\alpha-\psi)$$

$$-\tfrac{1}{8}.\frac{1}{\nu}a^3\gamma\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}.tg\varphi\sin(\alpha-\varphi).tg\psi$$

Mit $\sin\psi$ multiplizirt, ergiebt sich der obige horizontale Druck K, der für die Coulombsche Theorie folgender wird

$$K_1=\tfrac{1}{2}a^2b\gamma.tg^2\tfrac{1}{2}\psi$$

$$-\tfrac{1}{8}.\frac{1}{\nu}.tg^2\tfrac{1}{2}\alpha.\gamma.a^3.tg\psi\sin\psi.$$

Der kürzeren Rechnung wegen habe ich die vorigen beiden Ausdrücke K und K_1 nicht angewandt, obgleich die Françaischen Resultate sich meistens den beobachteten Resultaten noch mehr nähern, während die Hagenschen Resultate dann noch kleiner ausfallen würden.

§. 13. Um die Richtigkeit der Formel (§. 11)

$$(2) \qquad F=\tfrac{1}{2}h^2\gamma\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}tg\varphi\sin(\alpha-\varphi)$$

zu prüfen, hat Hagen Versuche mit Sand angestellt, sich aber dabei eines von dem früheren abweichenden Apparates bedient, um die Reibung an den Seitenwänden des Kastens zu verhindern. Da der Apparat vor dem Martonyschen bedeutende Vorzüge besitzt, so ist er in Figur 3 und 4 Tabelle VI abgebildet. Derselbe besteht in einer vertikalen beweglichen Wand $AEEB$, die durch eine Strebe T gegen das Einbiegen gesichert ist. Die Wand befand sich an einer vertikalen Latte GE, deren horizontale eiserne Axe FF zwischen zwei Spitzen beweglich war. Diese Latte ist gleichfalls gegen das Einbiegen durch eine Strebe gesichert. Da durch letztere die Latte aus der Vertikale gebracht wird, so wurde ein Gegengewicht W nöthig. Sobald nun die Latte genau vertikal hing, wurde die Schraube S bis zur Berührung vorgeschroben und dann der Boden AB vorgeschoben, auf dem die Sandmasse in regelmäßiger Form nach einer Chablone aufgeschüttet wurde. Die Form selbst ist aus den Figuren ersichtlich. Die Seitenböschungen DB, CA, DB waren so, daß sich der Sand bequem darauf erhalten konnte. Die Höhen der Sandschüttung betrugen nur 1 bis 5 Zoll, während sie bei Martonys Versuchen 6 bis 10 Fuß hoch waren. Der Druck des

Sandes wurde durch die Wagschale H gemeßen, die an einem Faden hing, der an der Latte bei E befestigt war nnd über die Rolle F ging. Dieser Druck setzt sich zusammen aus dem Druck von drei Prismen, deren Grundflächen das Rechteck $CDRQ$ und die Dreiecke ACQ und DRB sind. Hiernach ändert sich die Formel (2) §. 11. Ist nämlich der vertikale Abstand der Drehungsaxe von der Basis der Sandschüttung, oder . . . . $FU=l$

der vertikale Abstand der Drehungsaxe von dem Faden, oder . . . . $FE=\lambda$

die Höhe der Aufschüttung, oder . . . . $CQ=DR=h$

die obere Breite der Aufschüttung, oder . . . . $CD=b$

die untere Breite der Aufschüttung, oder . . . $AB=b+2c$

so daß also die Anlage der Seitenböschung $AQ=RB=c$ ist, so wird der Druck des Sandes auf den Theil $CDQR$ nach der Formel (2) §. 11

$$=\tfrac{1}{2}h^2 b\gamma \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} tg\,\varphi . \sin(\alpha-\varphi)$$

und das Moment desselben in Bezug auf die Axe FF, wie leicht zu zeigen

$$=\tfrac{1}{2}h^2 b\gamma . \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} tg\,\varphi \sin(\alpha-\varphi)(l-\tfrac{1}{3}h)$$

Um die Momente des Druckes vom Sande auf die beiden Dreiecke ACQ und BDR zu finden, denke man dieselben in sehr schmalen Schichten NP zerlegt, deren Breite $=dx$ ist, während man $BP=x$ setzt; dann ist der Druck auf eine solche schmale Fläche

$$=\tfrac{1}{2}\frac{h^2}{c^2}\gamma . \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} tg\,\varphi . \sin(\alpha-\varphi)x^2 dx$$

folglich das Moment derselben

$$=\tfrac{1}{2}\frac{h^2}{c^2}\gamma \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} tg\,\varphi . \sin(\alpha-\varphi)\left(lx^2-\tfrac{1}{3}\frac{h}{c}\,x^3\right)$$

und die Summe von allen diesen Momenten für die ganze Fläche $ACDB$:

$$=\tfrac{1}{2}h^2\gamma . \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} tg\,\varphi \sin(\alpha-\varphi)\left\{b(l-\tfrac{1}{3}h)+\tfrac{2}{3}c(l-\tfrac{1}{4}h)\right\}.$$

Auf den Faden E, oder im Abstande λ von der Axe wird demnach der Druck betragen:

$$(3) \qquad E = \tfrac{1}{2}\frac{h^2}{\lambda}\gamma\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\,tg\,\varphi\sin(\alpha-\varphi)\{b(l-\tfrac{1}{3}h) + \tfrac{2}{3}c(l-\tfrac{1}{4}h)\}$$

wo φ aus der Gleichung (1) §. 11 zu nehmen ist.

Für die Coulombsche Theorie wird diese Formel einfach

$$E = \tfrac{1}{2}\frac{h^2}{\lambda}\gamma\,tg^2\tfrac{1}{2}\alpha\{b(l-\tfrac{1}{3}h) + \tfrac{2}{3}c(l-\tfrac{1}{4}h)\}.$$

Berechnet man nach diesen beiden Formeln die Hagenschen Versuche, so stellen sich dieselben folgendermaaßen heraus:

Zusammenstellung der Hagenschen Versuche und ihre Vergleichung mit der Theorie.

№ des Versuchs	Drückendes Material f	λ Zoll	l Zoll	h Zoll	b Zoll	rc Zoll	Gewicht eines Kubikzolles γ Loth	Natürliche Böschung α	Druck gegen die vertikale Wand: beobachtet Loth	Druck gegen die vertikale Wand: berechnet nach Français Loth	Druck gegen die vertikale Wand: berechnet nach Hagen Loth
1	Berliner Sand	26,02	30,52	2	9,10	6,07	1,87	55°	8,45	12,94	8,20
2		dito	dito	3	6,07	9,10	dito	(54° bis 58°)	16,65	23,61	14,96
3		dito	dito	4	3,03	12,14	dito		22,35	32,37	20,50
4	schwarzer	39,22	33,22	1	14,4	3,2	2,82	62°	6,39	9,20	6,0
5	Streusand	dito	dito	2	11,2	6,4	dito	(61° bis 63°)	21,44	31,47	20,5
6		dito	dito	3	8,0	9,6	dito	steilste Böschung	41,02	59,05	38,45
7		dito	dito	4	4,8	12,8	dito	= 55°	69,85	84,47	55,0
8		dito	dito	5	1,6	16,0	dito		72,75	100,39	65,4
9	Schrot	41,42	45,92	1	7,60	4,52	8,245	66° 30'	11,50	17,77	11,81
10		dito	dito	1,5	5,34	6,78	dito	(65° bis° 68)	23,03	33,27	22,11
11		dito	dito	2,0	3,08	9,04	dito		33,50	47,29	31,42
12		dito	dito	2,5	0,82	11,30	dito		38,92	55,53	36,90

§. 14. Die Versuche von Woltmann, Martony und Hagen sind meines Wissens die einzigen in Deutschland vorgenommenen Versuche, welche mit der nöthigen Genauigkeit ausgeführt sind, und außer den von Maynicl angestellten überall die einzigen zuverläßigen. Die letztern habe ich nicht erhalten können, und muß ich mich daher begnügen, die Vergleichung der Coulombschen und Hagenschen Theorie auf die im vorigen angeführten Versuche zu begründen. Die Versuche von Maynicl sind ebenso ausgeführt, wie die von Martony, nur nicht mit derselben Genauigkeit und in derselben Größe; einen Einfluß auf das Resultat können sie somit auch nicht haben, das meiner Meinung nach allein aus den Martonyschen Versuchen hergeleitet werden kann, da sie allein mit der nöthigen Genauigkeit und zugleich im großen ausgeführt sind.

Denn was zuerst die Woltmannschen Versuche betrifft, so legt Woltmann selbst ihnen wenig Gewicht bei, und hält es für sicherer, sich an die Resultate der Theorie zu halten.

Die Theorie des Herrn Geheimen Oberbauraths Hagen schließt sich zwar diesen Versuchen weit beßer an, als die Coulombsche Theorie, und würde es selbst noch beßer thun, wenn man auf die Seitenreibung an den Wänden und auf die Kohäsian Rücksicht nehmen wollte.

Dasselbe ist der Fall mit den Hagenschen Versuchen selbst. Die Hagensche Theorie schließt sich auch diesen Versuchen recht gut an, weit beßer als die Coulombsche Theorie. Die Resultate der Hagenschen Rechnung fallen meistens etwas zu klein aus, und würden noch kleiner ausfallen, wenn man die Kohäsion mit in Rechnung ziehen könnte, die namentlich bei dem schwarzen Streusande, gewiß nicht unmerklich ist, da sich der Sand auf steilern Böschungen, als die natürliche, anhäufen ließ. Vielleicht ist auch die natürliche Böschung zu steil angegeben, da nach der Ansicht des Herrn Geheimen Oberbauraths Hagen die steilste Böschung der Erde diejenige ist, die dem Reibungswinkel zukommt. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn absolut gar keine Kohäsion vorhanden ist; ein Fall, der vielleicht nie eintritt.

Ueberdies sind aber die Hagenschen Versuche so überaus im kleinen angestellt, daß sich meiner Meinung nach daraus gar kein

Resultat für die Anwendung im großen schließen läßt, wie dies auch der Herr Geheime Oberbaurath Hagen selbst bemerkt; höchstens läßt sich, in Vergleich mit den Martonyschen Versuchen daraus vielleicht schließen, daß der Erddruck im kleinen einem andern Gesetze folge, als im großen.

Es bleiben somit nur, wie schon erwähnt ist, die Martonyschen Versuche übrig, aus denen, meiner Meinung nach, die Richtigkeit der einen oder andern Theorie gefolgert werden kann. Vergleicht man die Beobachtungen mit den Rechnungen, so erkennt man sogleich, daß die Hagenschen Theorie viel zu große Druckprismen und viel zu kleine Druckkräfte liefert, während die Coulombsche Theorie die erstern ein klein wenig zu klein liefert und die letztern etwas zu groß, wenn man nicht auf die Kohäsion Rücksicht nimmt, dagegen bald kleiner, bald größer, wenn darauf Rücksicht genommen wird. Der Unterschied ist, außer bei der trockenen Dammerde so gering, daß er füglich unberücksichtigt gelaßen werden kann. — Je größer die drückende Erdmasse ist, desto weiter entfernen sich die Hagenschen Resultate und desto mehr nähern sich die Coulombschen Resultate. Dies läßt um so mehr auf die Richtigkeit der Coulombschen Theorie schließen, da die Seitenreibung an den Wänden hier weniger Einfluß ausüben kann. Nimmt man auf diese Seitenreibung überall Rücksicht [nach der Formel (*H*)], so werden die herabfallenden Prismen durch die Theorie etwas zu klein gegeben, wie dies einige Versuche von Martony mit Kasten von verschiedener Breite, gegen alles Vermuthen, darthun; die Resultate der Coulombschen Rechnung für die Größe des Druckprismas würden somit größer, und sich den Versuchen genau anschließen, während die Hagenschen Resultate sich noch mehr davon entfernen würden. Der Druck selbst würde, bei der Berücksichtigung der Seitenreibung noch etwas kleiner werden; die Coulombschen Resultate würden sich im allgemeinen noch mehr den beobachteten annähren, und nahe damit zusammenfallen, die Hagenschen würden sich noch mehr entfernen, und oft kaum die Hälfte des beobachteten Werthes erreichen.

Die große Uebereinstimmung der Coulombschen Theorie, und die Abweichung der Hagenschen Theorie mit den Versuchen zeigt sich namentlich auch bei der im großen ausgeführten Mauer.

Dieser Versuch befindet sich in der Tabelle §. 10 unter Nro. 23, derselbe war mit einer 22 Fuß hohen Aufschüttung bei einer Mauer von 12 Fuß Länge und 18 Fuß Höhe ausgeführt. — Für das genaue Gleichgewicht hätte die Stärke dieser vertikalen Mauer 4,64 Fuß sein müßen. Man machte sie 4,2 Fuß dick. Die Erdfüllung geschah nach vollendeter Mauer sehr sorgfältig. Als die Erdfüllung bis an die Mauerkrone vorgerückt war, wich die Mauer oben um 0,6 Fuß aus und fiel bei einer Ueberhöhung von 4 Fuß um. Die berechnete Mauerstärke war somit richtig.

Um nach der Hagenschen Formel die nöthige Stärke der Mauer zu berechnen, hat man das Moment des Erddrucks

$$=\tfrac{1}{6}a^3\gamma\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}tg\,\varphi\,.\sin(\alpha-\varphi),$$

ferner das der Mauer, wenn x deren Breite, a deren Höhe und p das Gewicht eines Kubikfußes Mauerwerkes ist:

$$=\frac{a}{2}px^2$$

mithin ist

$$\frac{a}{2}px^2=\tfrac{1}{6}a^3\gamma\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}tg\,\varphi\sin(\alpha-\varphi)$$

und daraus

$$x=\sqrt{\tfrac{1}{3}\frac{a^2\gamma\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}tg\,\alpha\sin(\alpha-\varphi)}{p}}=3{,}673,$$

mithin zu schwach, da ungeachtet der nicht berücksichtigten Kohäsion schon die Mauerstärke 4,2 Fuß nicht bedeutend genug war.

Das abgefallene Erdprisma ist dem Gewichte nach in der Tabelle aufgeführt, und zeigt die schönste Uebereinstimmung mit der Coulombschen Theorie.

Wollte man sich zur Berechnung der Mauerstärken der Hagenschen Theorie bedienen, so würde man somit dem vorigen gemäß stets den Einsturz der Mauer erwarten müßen, während die Coulombsche Theorie die richtigen Mauerstärken liefert; ihre

Richtigkeit, so wie die Unrichtigkeit der Hagenschen Theorie kann meiner Meinung nach, sobald von wirklichen Anlagen die Rede ist, daher auch nicht weiter in Zweifel gezogen werden.

Sehr wünschenswerth aber bleibt es, die Versuche über den Erddruck und namentlich über die Kohäsion der Erde, mit dem Hagenschen Apparate im großen nochmals auszuführen, und dadurch jeden Zweifel über die Richtigkeit der einen oder andern Theorie gänzlich zu beseitigen.

Beim Verleger dieses Werkes sind außer andern Wissenschaftlichen, nachstehende Schriften über Geometrie und den damit verwandten Zweigen erschienen:

Buchheister (J. C.), Geometrie für Bürger- und Gewerbeschulen, wie auch zum Selbstunterricht für Handwerker. 1r Bd. Mit 3 Kpfrtf. 8. 1826. 12 Ggr.; 15 Sgr.

Dasselbe Werk. 2r Bd. Mit 6 Kpfrtf. 8. 1829. 16 Ggr.; 20 Sgr

Cauchy (A. L.), Vorlesungen über die Differenzialrechnung, mit Fourier's Auflösungsmethode der bestimmten Gleichungen verbunden. Aus dem Franz. übers. von Dr. C. H. Schnuse. Mit 1 Steindruckt. (in gr. 4.) Lexikon-8. 1836. geh. 2 Thlr.

— — Vorlesungen über die Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie. Deutsch bearbeitet von Dr. C. H. Schnuse. Lexikon-8. 1840. geh. 2 Thlr. 16 Ggr.; 2 Thlr. 20 Sgr.

Düchemin (Colonel), Experimentaluntersuchungen über die Gesetze des Widerstandes der Flüssigkeiten. Deutsch herausgegeben von Dr. H. C. Schnuse. Mit 4 Figurentafeln. gr. 8. geh. 1 Thlr. 12 Ggr.; 1 Thlr. 15 Sgr.

Gelpke (Dr. A. H. C.), Lehrbuch der ebenen Trigonometrie, mit trigonometr. und astronom. Beispielen verbunden, nebst einer Anleitung zur Berechnung der goniometr. Linien. 8. 1824. 16 Ggr.; 20 Sgr.

Müller (J. H. B.), das landwirthschaftliche Rechnungswesen, oder gründliche Anweisung zur gedrängten und übersichtlichen Rechnungs- und Registerführung der Oeconomien, nach praktischer Anwendung entworfen, und in vollständig ausgearbeiteten und mit Erklärungen versehenen Formularen dargestellt, nebst einer Anleitung zur Revision dieses Rechnungswesen ꝛc. Neue vermehrte Aufl gr. 4. 1823. geh. 1 Thlr. 8 Ggr.; 1 Thlr. 10 Sgr.

Pambour (Graf P. M G. de), theoretisch-praktisches Handbuch über Dampfwagen, enthaltend die Construction der Locomotiven und ihre Anwendungsart zur Fortschaffung der Lasten, der Berechnungsart der Geschwindigkeiten, mit welchen sie bestimmte Ladungen fortbewegen und der Vortheile, welche sie unter allen Umständen gewähren können, die Angabe der Bedingungen, welche bei ihrer Construction zur Erlangung bestimmter Effecte erfüllt werden müssen, Untersuchungen, welche sich auf eine große Anzahl in England angestellter Versuche stützen. Nach der 2ten, sehr vermehrten und verbesserten Originalauflage deutsch bearbeitet von Dr. C. H. Schnuse. Mit 5 Figurentafeln in qu. 1/2 Fol. Lexikon 8. 1841. geh. 2 Thlr. 18 Ggr.; 2 Thlr. 22 Sgr.

— — neue Theorie der Dampfmaschine, oder vollständige Anleitung zur Berechnung des Effectes und der Dimensionen aller Arten von Dampfmaschinen, wo-

rin zugleich die Unrichtigkeit der bisher gebräuchlichen Berechnungsmethoden nachgewiesen und eine Reihe neuer Formeln mitgetheilt wird, welche die Geschwindigkeit einer Dampfmaschine bei einer gegebenen Ladung, ihre Ladung für eine bestimmte Geschwindigkeit, ihre Verdampfungskraft für bestimmte Effecte, ihre Nutzkraft in Pferdekräften, ihre Nutzkraft für eine gegebene Quantität consumirten Wassers und Brennmaterials, ihre Ladung oder ihre Expansion, welche den größten Nutzeffect giebt rc. ausdrücken. Nebst einem Anhange, welcher eine kurze Anweisung zum richtigen Verständniß und zum leichten Gebrauche der in diesem Werke vorkommenden mathematischen Formeln für diejenigen enthält, welche mit den Regeln der Algebra noch nicht vertraut sind. Deutsch bearbeitet von Dr. C. H. Schnuse. Lex.=8. 1839. geh. 1 Thlr. 16 Ggr.; 1 Thlr. 20 Sgr.

Poisson (S. D.), Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren wichtigsten Anwendungen. Deutsch bearbeitet und mit den nöthigen Zusätzen versehen von Dr. C. H. Schnuse. gr. 8. 1841. geh. 2 Thlr. 18 Ggr.; 2 Thlr. 22 Sgr.

Rechnungsaufgaben für Stadt= und Landschulen, oder Beschäftigungen für Schüler und Schülerinnen in Rechenstunden. Von dem Herausgeber der Lese= und Denkübungen. 8. 1830. geb. 6 Ggr.; 8 Sgr.

Antworten hierzu. 8. 1830. 4 Ggr.; 5 Sgr.

Romett (Chr.), Lehrbuch der ebenen Trigonometrie, besonders für angehende Practiker bearbeitet und durch viele Beispiele und interessante Aufgaben erläutert. Mit 1 Kpfrtfl. und einer Tabelle der (wichtigsten) geniometrischen Formeln. 8. 1829. 18 Ggr.; 22 Sgr.

Die Tabelle apart auf Schreibpapier. 4 Ggr.; 5 Sgr.

Schnuse (Dr. C. H.), Sammlung ausgewählter allgemeiner Formeln, Beispiele und Aufgaben aus der Differenzialrechnung und deren Anwendung auf Geometrie. Ein Hülfsbuch für Lehrer und Schüler an höhern Unterrichtsanstalten. Mit 1 Figurentafel. 1ste Hälfte. 10 Bogen. gr. 8. geh. 16 Ggr.; 20 Sgr. (Die zweite Hälfte mit der Figurentafel, erfolgt bis nächste Ostern.)

Scholz der Dritte (J.), Das Baurecht und die Rechte in Beziehung auf Gebäude in den verschiedenen Verhältnissen des bürgerlichen Lebens. gr. 12. 1839. geh. 2 Thlr. 8 Ggr.; 2 Thlr. 10 Sgr.

— — Bemerkungen über die Gebührentaxe der Advocaten, Procuratoren und Notaren in den Herzogl. Braunschw. Landen, sammt Gemeinenbescheiden und Rückscheidungen der Obergerichte. gr. 12. 1837. geh. 12 Ggr. 15 Sgr.

— — über Güterübergaben und Rückgaben bei Pachtungen und andern Geschäften, für Juristen und Kameralisten, Kommissare, Notare, Assistenten, Taxatoren rc, mit Formularen und Tabellen. gr. 8. 1840. geh. 2 Thlr.

Scholz der Dritte (J.) über die Intestaterbrechte der Ehegatten auf deutschen Bauerngütern, nach gemeinen und besondern Rechten. Mit einer Vorrede vom Oberappellationsgerichts-Präsidenten Dr. C. L. Runde: über das Güterrecht der Ehegatten auf deutschen Bauerngütern während der Ehe. Angehängt: Eine Abhandlung über die Intestaterbfolge der Ehegatten in den Herzogl. Braunschweig. Landen vom Regierungs- und Cammer-Präsidenten W. A. Eschenburg. gr. 8. 1837. geh. 1 Thlr. 8 Ggr.; 1 Thlr. 10 Sgr.

Silberschmidt (H.), die unentdeckten Geheimnisse im Gebiete des Schachspiels oder Verbesserungen mehrerer Spiele des Selenus, Philidor's, Stamma's, Calabroisen ꝛc.; nebst einer leichten theoretisch-praktischen Anweisung zum Schacht- und neu verbesserten Kriegsspiele. Mit 1 Kpfrtfl. gr. 8. 1826. 1 Thlr.

Sommer (F. v.), rein wissenschaftliche Begründung der wichtigsten arithmetischen Theoreme. gr. 8. 1823. geh. 6 Ggr.; 8 Sgr.

— — System der topisch.-arithm. Combinationslehre und der Auflösung aller Gleichungen. Eine durch die geschichtliche Entfaltung der Mathematik von selbst entsprungene Preisaufgabe. 8. 1823. geh. 10 Ggr. 12 Sgr.

Spehr (Dr. F. W.), neue Principien des Fluentencalculs, enthaltend die Grundsätze der Differential- und Variationsrechnung, unabhängig von der gewöhnlichen Fluxionsmethode, von den Begriffen des unendlich Kleinen oder der verschwindenden Größen, von der Methode der Gränzen und der Functionslehre, zugleich als Lehrbuch dieser Wissenschaft dargestellt, und mit Anwendung auf die analytische Geometrie und höhere Mechanik verbunden. Mit 5 Kupfertafeln. gr. 8. 1826. 3 Thlr.

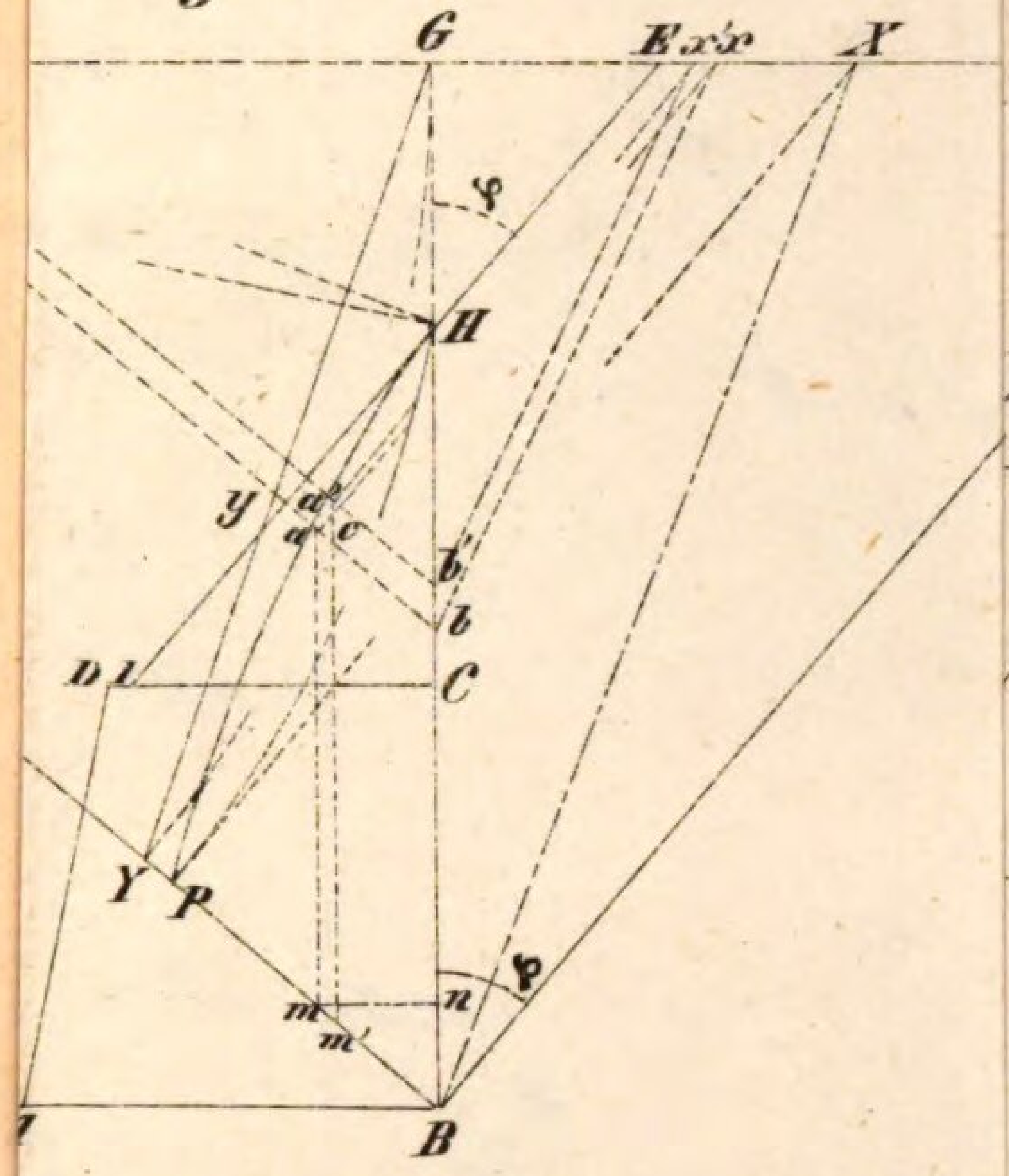
Weinholz (Dr. W.), verschiebbare chemische Aequivalenten-Scala für Aerzte, Apotheker, Hüttenleute, Fabrikanten chemischer Präparate, Technologen und für theoretische und praktische Chemiker überhaupt. Mit einer Anweisung zum Gebrauch derselben. 8. 1830. n. 20 Ggr.; 25 Sgr.

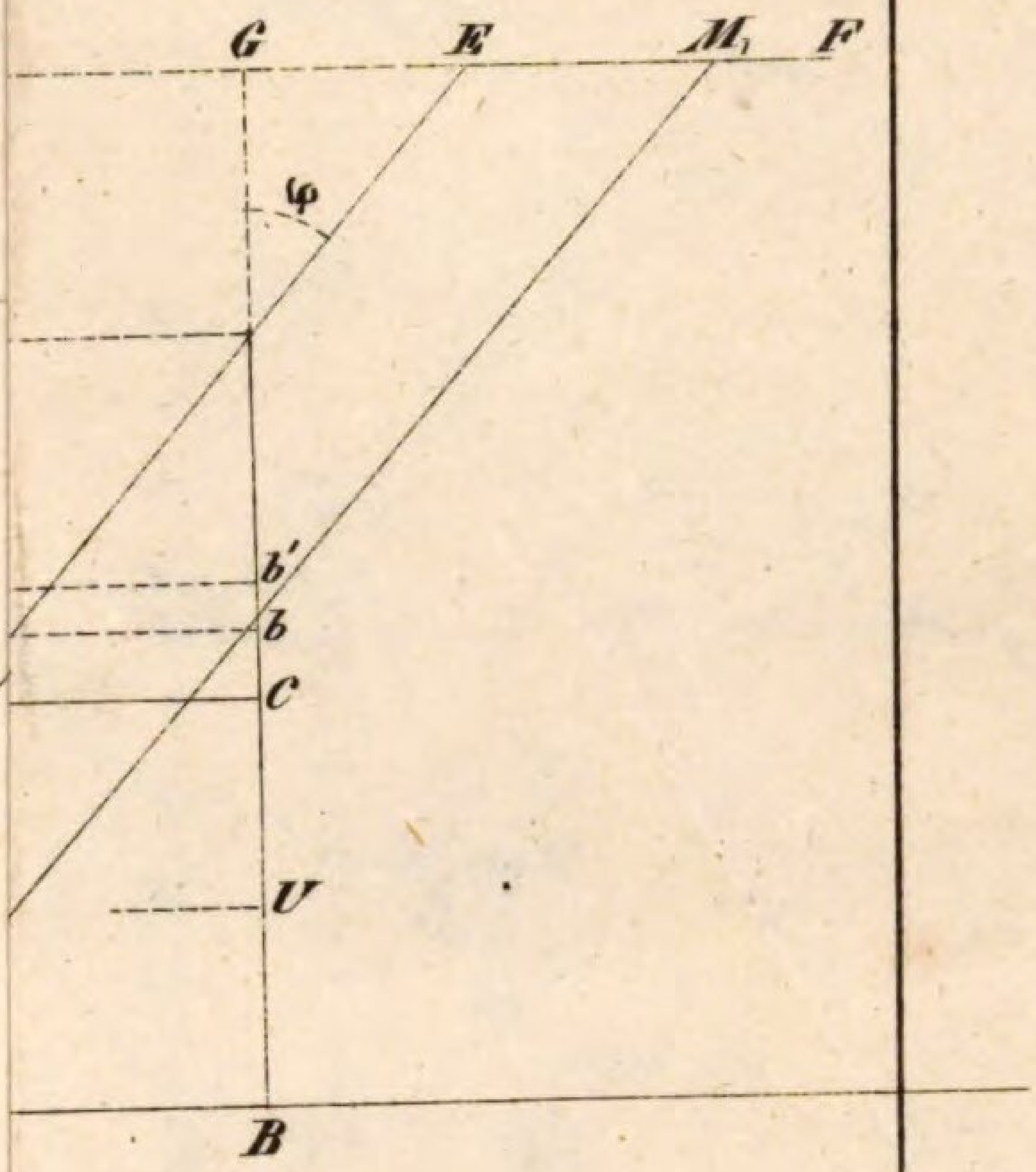
— — die Scala auf hölzernem Rahmen nebst Anweisung.
n 1 Thlr. 8 Ggr.; 1 Thlr. 10 Sgr.

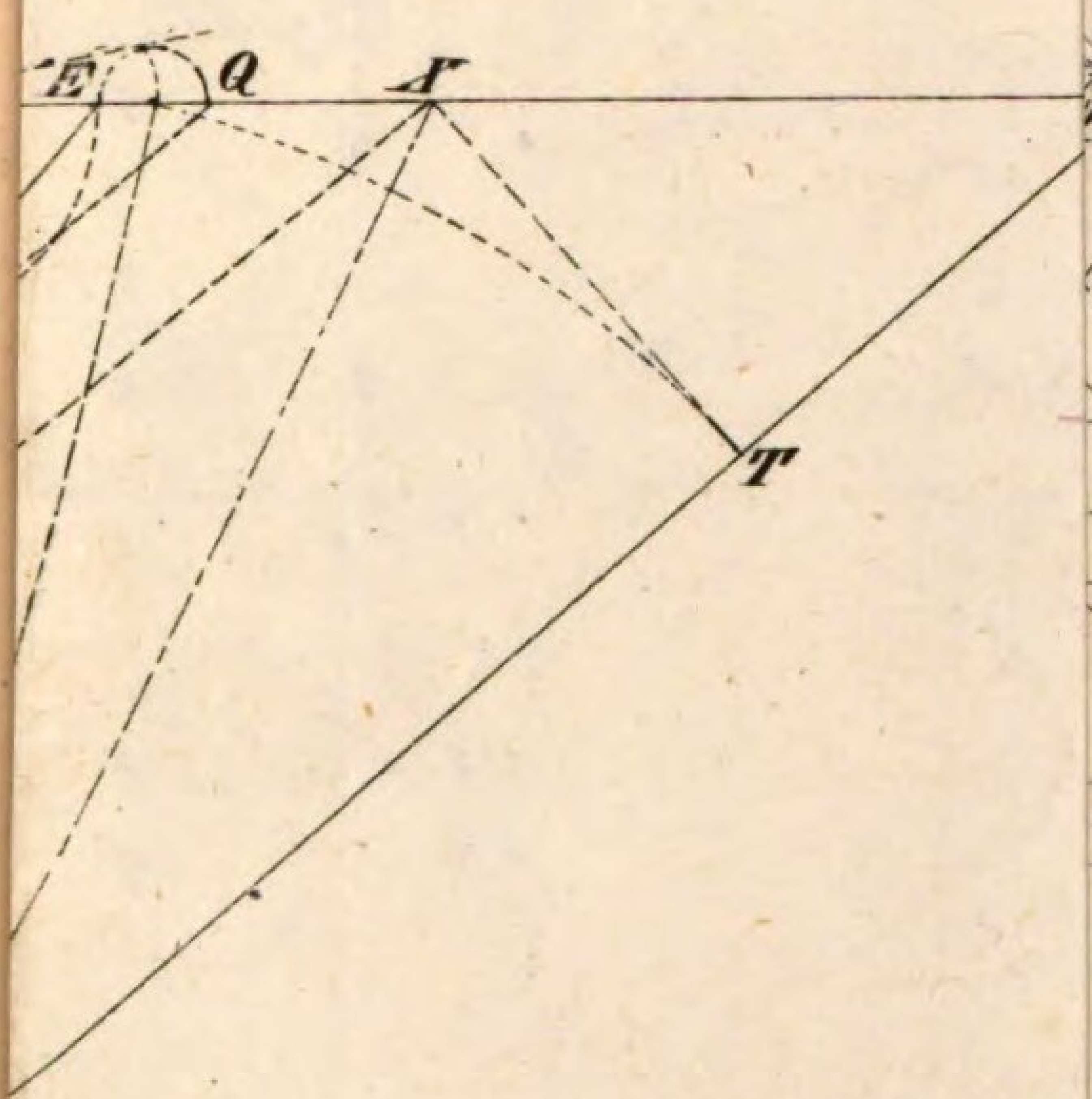
Whewell (Prof. W.), Elementar-Lehrbuch der Mechanik zum Gebrauch für technische Lehranstalten und zugleich als ein Supplement zu den Lehrbüchern der Physik. Nach der 5ten sehr verbesserten und vermehrten Originalauflage aus dem Englischen übersetzt von Dr. C. H. Schnuse. Mit 8 Figurentafeln. Lex.-8. 1841. geh. 1 Thlr. 16 Ggr.; 1 Thlr. 20 Sgr.

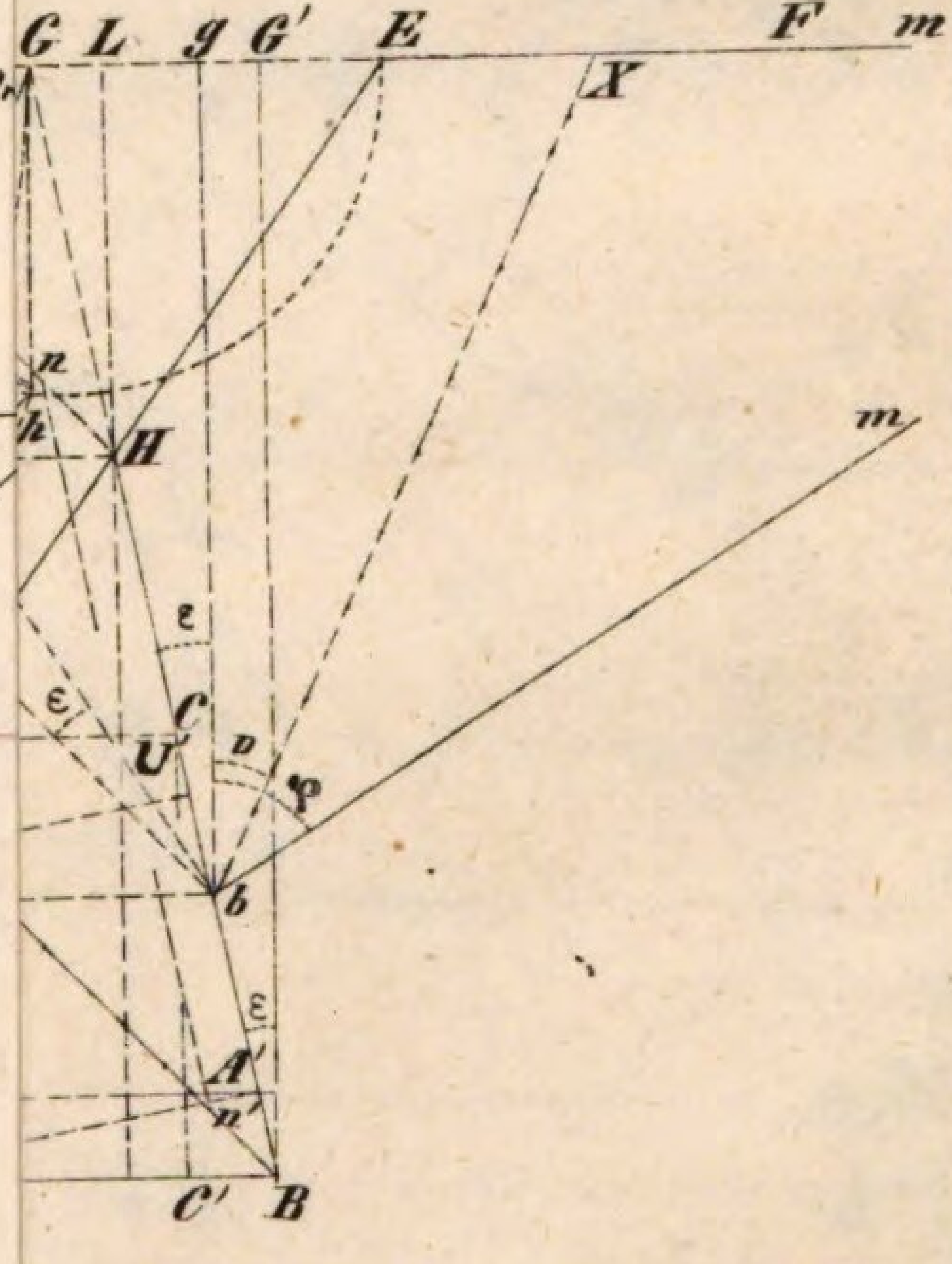
234.

Fig. 7.


G
E x' x
X
φ
H
y
a'
a
c
b'
b
D L
C
Y
P
m
m'
n
φ
B


G
E
M
F
φ
b'
b
C
U
B


E
Q
X
T


G
L
g
G'
E
F
m
o
X
n
h
H
m
ε
ε
C
U
v
φ
b
ε
A'
n'
C'
B

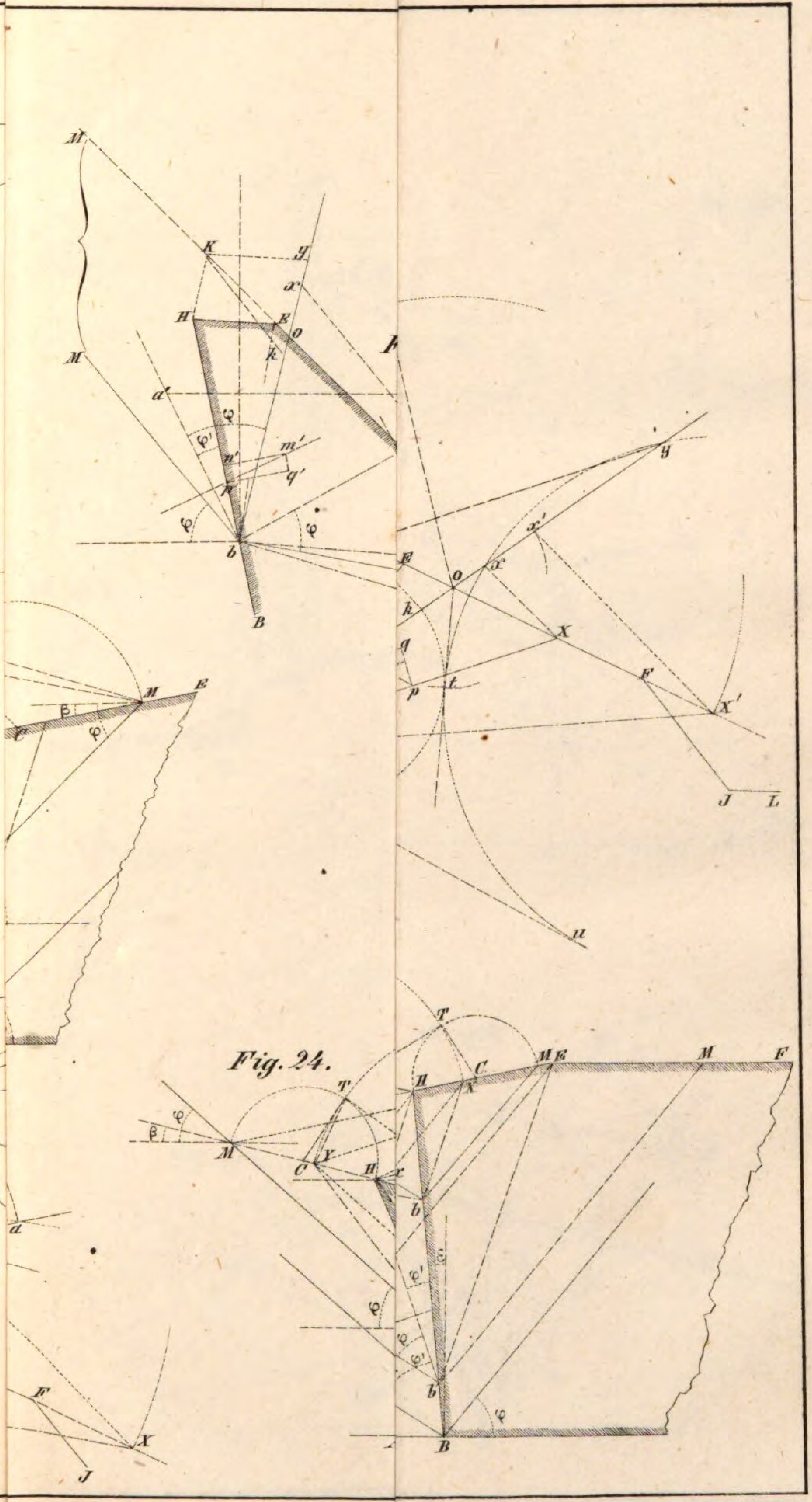
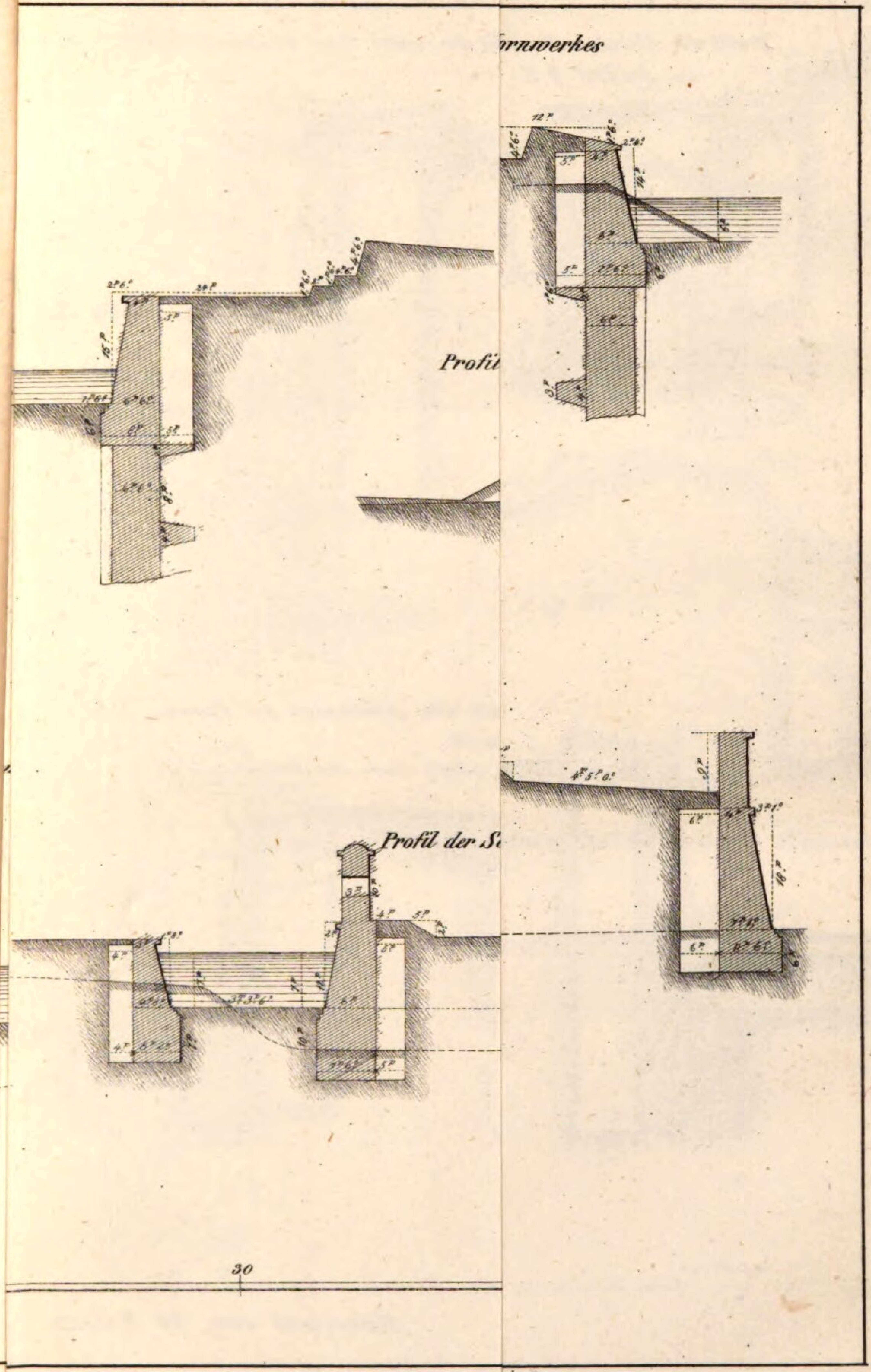

M
K
y
x
H
E
o
k
M
d
φ
φ'
n'
m'
q'
p
φ
φ
b
B
E
o
x
x'
y
k
X
q
p
t
F
X'
J
L
u
M
E
β
φ
C
T
C
M E
M
F
T
H
A
φ
β
M
Y
C
H
x
b
a
φ'
φ
φ
φ'
b
φ
B
F
X
J

Fig. 24.

auban entworfen. Taf. IV.



Taf. V.

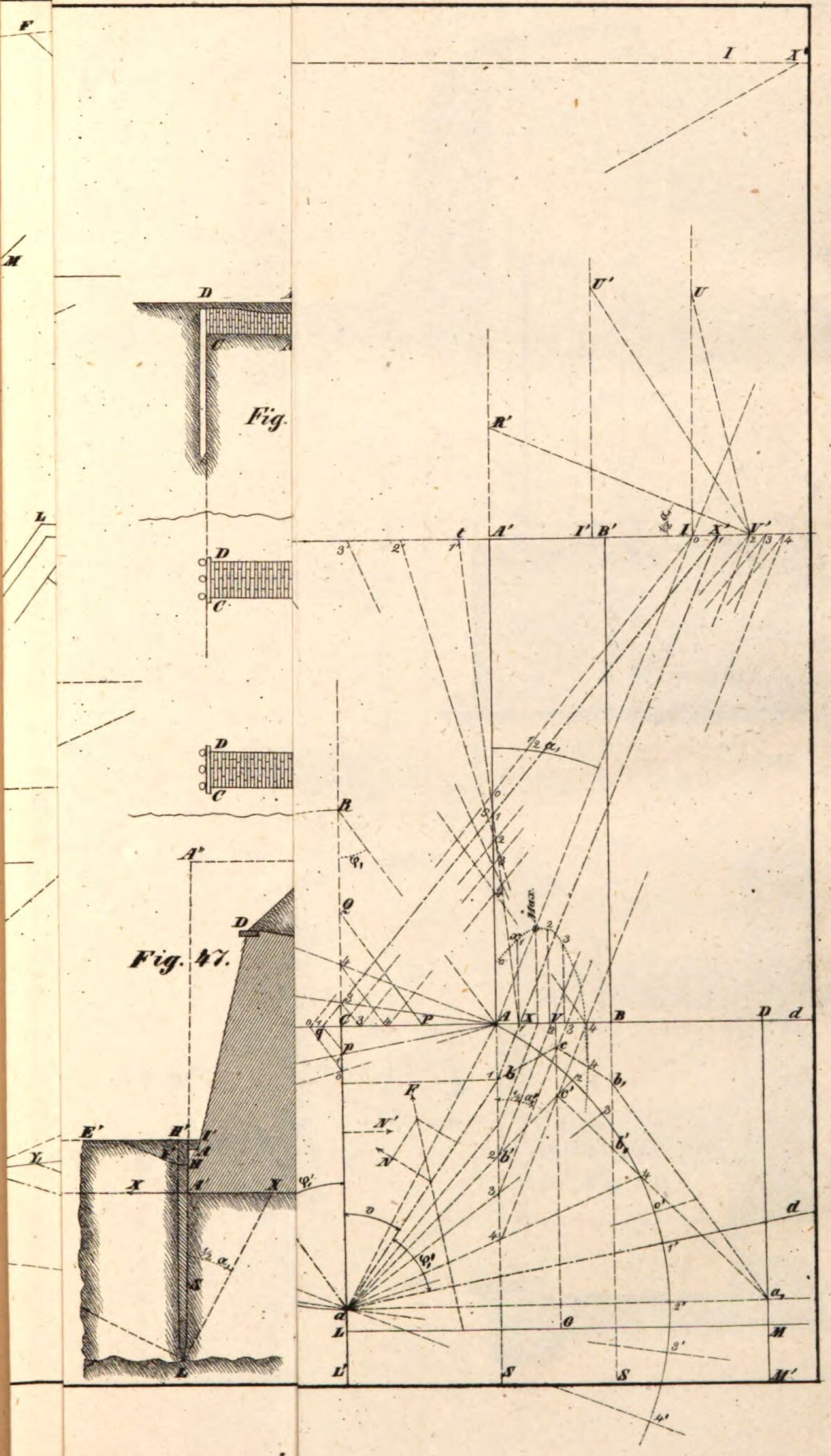
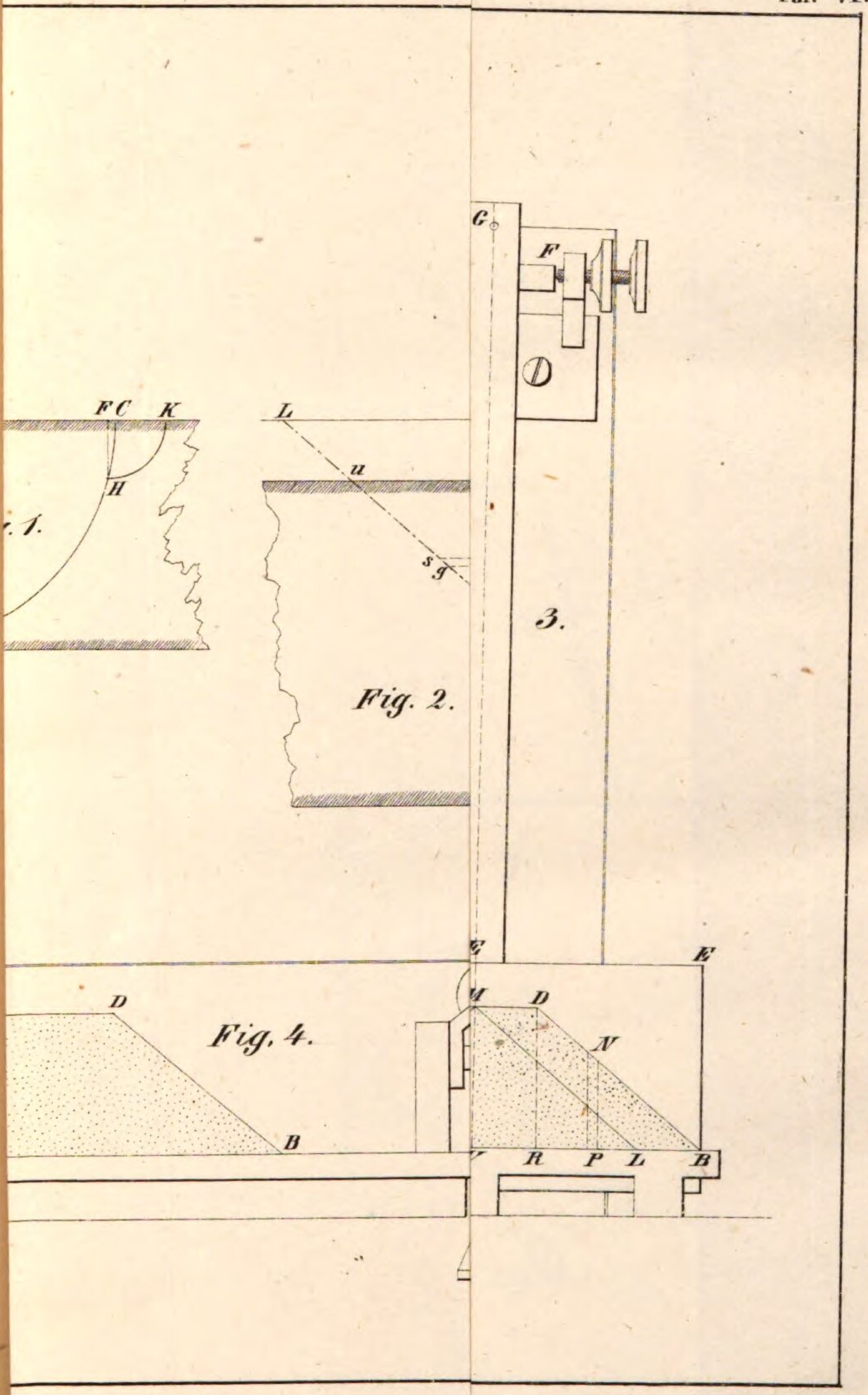


Fig. 47.

Taf. VI.



Förster.Buchb.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Poncelet, Jean Victor,

Ueber die Stabilität der Erdbekleidungen und deren Fundamente

Braunschweig 1844

App.mil. 103 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10255977-6